2012 第 期

数学教学

SHUXUE JIAOXUE 中华人民共和国教育部主管

ISSN 0488-7387





10>
9 770488 738122

“数字计算”的比拼: 我们可以向中国学习什么?

——英国《每日电讯报》对范良火教授专访*

2012年6月18日, 英国的主流媒体《每日电讯报》, 在网络版上发表了记者斯坦福(Peter Stanford)的一篇专访, 受访者是现任英国南安普顿大学教育学院教授的范良火博士. 专访的标题是:

Numeracy Campaign: What We Can Learn From China?

意思是在中国和英国的儿童在数字计算方面相比较, 英国可以向中国学习什么?

这篇报道引起我们的好奇. 大家知道, 中国的数学教育正在进行新课程改革, 而课程改革的目标包括颠覆中国数学教育的一些所谓“传统”: 死记硬背, 脱离学生实际, 缺乏创新, 为考试分数的功利主义等等. 为什么这篇专访要问向中国学习什么? 中国数学教育在外国人的眼中究竟是怎样的? 范良火教授又是怎样回答的? 我们应该怎样看待自己呢?

范良火教授, 1962年出生于浙江象山. 在宁波师范学院毕业后担任多年中学数学教师. 1989年, 在华东师范大学数学系获得硕士学位, 师从张奠宙教授. 1993年去美国芝加哥大学, 在著名数学教育家尤什斯金(Z. Usiskin)指导下获得博士学位(1998). 此后在新加坡南洋大学担任教职, 发表了大量的论文. 与此同时, 范良火为中国数学教育的进步做了许多努力, 最突出的一件事是领衔编写英文著作《How Chinese Learn Mathematics (华人如何学习数学)》一书, 在国际上获得很好的评价.

在新加坡期间, 范良火不仅是一位能写文章的作者, 担任数学教育杂志的主编, 还曾经主持过一系列新加坡政府委托的数学教育研究项目, 成绩斐然. 众所周知, 新加坡的数学教育在国际上公认为是最好的, 范良火教授在其中学习和研究, 做出了自己的贡献.

有了在中国和新加坡接受教育和学习研究的背景, 加上美国现代数学教育研究的经历, 以及国际同行的良好声誉, 英国著名学府——南安普顿大学的教育学院, 于2010年聘请范良火为正教授, 领导和主持“数学和科学研究中心”. 值得一提的是, 范良火教授至今依然持有中国护照. 可以说, 这是一位中国数学教育家在国际著名大学的教育学院担任了领导职务, 这在我国教育界十分罕见, 也许到目前为止是绝无仅有的.

今年7月, 范良火教授在韩国参加第12届数学教育大会, 并主持了《华人数学教育论坛》, 广受各方关注. 会后, 范教授回象山老家探亲路过上海, 造访华东师大, 作客上海教育出版社. 我们有机会和他接触. 谈话中有一部分涉及中国数学教育在国外人士中的印象, 他说到了那篇《每日电讯报》的专访. 以下, 我们从那篇专访中摘引一些片断, 供大家参考.

在南安普顿大学附近的咖啡馆里, 记者和范教授相对而坐, 尝试着探讨亚洲儿童在数学上为什么会比西方儿童要好的秘密. 2010年, “经济合作与发展组织(OECD)”发布: 在70个国家对15岁孩子统一进行的PISA测试的结果显示, 中国上海取得了第一的成绩, 新加坡第二, 而英国是第二十八. 这些成绩的背后有什么秘密吗?

范良火教授认为, 数学学习首先是一件文化层面的事情. 范教授在中国和新加坡工作、生活了近40年, 所以, 他能清楚地看到在数学学习上, 英国和中国、新加坡之间的文化差异. “在英国, 孩子们会振振有词地说我不喜欢数

* 《每日电讯报》记者对范良火教授的采访见http://www.telegraph.co.uk/education/maths-reform/9338540/Numeracy-Campaign-What-we-can-learn-from-China.html

学. 但是在中国和新加坡, 我从未听到过有一个孩子会毫不尴尬地说自己不喜欢数学." "在中国, 所有的家长都知道数学是最重要的学科, 而且他们都觉得在一个现代社会里, 人人都必须掌握一些必要的数学, 即便这种想法使他们不得不花更大的力气. 家长的这种态度也传递给了孩子们." 范教授觉得, "在英国, 你能够感觉到学生家长对数学的态度是和中国的家长不一样的, 要是孩子不喜欢数学, 家长会觉得也没什么关系."

并非只有范教授认为英国的"数学教育"需要变革. 就在6月中旬, 英国政府通过了一项"回到基础"的小学数学课程方案, 该方案将重新强调背诵九九表、心算、计算分数、甚至机械的学习方式 (范教授在和我们讨论时说, 英国并没有提出"回到基础"的口号. 这里只是记者自己在用通俗的语言进行解说.). 这就是说, 大部分40岁以上的英国人将会看到他们孩提时代的训练方式将重新回到当今的教室之中.

范教授曾考虑过与家人在新加坡定居, 但当南安普顿向他提出聘请时, 范教授还是接受了邀请. 当记者问及要提高英国的数学教育水平有那么多的挑战, 为何还要来南安普顿时, 范教授笑了, "我一直在关注英国的数学教学体系, 早在上世纪80年代, 当我还是一名硕士生的时候, 就翻译了Cockcroft爵士的著名报告《数学算数》(人民教育出版社, 1994). 所以, 我对英国的数学教学还是熟悉的, 而且英国在数学教学上也有许多可取之处, 英国的数学教育体系也是国际比较的基准."

令《每日电讯报》记者奇怪的是, 范教授欣赏英国人在做事方式上的一些优点, 尽管在英国人自己看来, 很多事情并不完美. 不过, 在为提升数学教学水平寻找合适的榜样的问题上, 英国的部长和教育工作者罕见地一致认为要"向东方看齐".

范教授特别强调了数学的"必修"性质. "(在亚洲) 数学作为一门必修课, 很多孩子一直要学习到17、18岁." 这也是英国教育部长M. Gove先生所乐意看到的, 因为他也希望英国16到18岁的学生能继续学数学. (英国中学的最后两年数学是选修课)

范教授解释说, 在中国和新加坡, 不同年级的中学生学习不同的数学模块. 有的学生选择为大学里学习科学专业的学生开设的数学, 而有的选择针对将来学艺术、历史、地理而开设的文科数学. "除非有一些学生要做演员, 不然人人都要学数学, 很少有例外的."

在其他的因素中, 范教授特别强调了教师教学质量的因素. "在中国, 教数学的老师都是专科老师, 我当教师时, 我只教数学." 在新加坡的中学也是如此. 但在英国, 小学教师中只有不到5%的老师有数学学位, 在GCSE (普通中等教育证书) 的数学课中, 据估计有30%～40%的数学课是由其他学科的老师来上的.

范教授认为, 还不仅仅是教师的学科背景的问题, 在中国和新加坡, "老师们要做很多专业发展的事情, 这是每周的例行工作. 英国则缺乏这方面的系统安排. 而且英国有的教师往往担心学生不喜欢数学, 降低了要求. 当然, 老师应该让数学变得有趣. 其实一旦学生获得基本的技能后, 他们会领略到数学的魅力."

范教授是中国和新加坡一些数学课本的编写者. "熟能生巧"正是亚洲很多学校使用的数学课本背后的哲学. 这会不会让儿童觉得被动和枯燥, 以致厌恶数学? OECD在其报告中, 对中国的数学水平赞不绝口, 但也指出了中国"激烈的考试与测试"的文化. 华东师范大学许纪霖教授的儿子正读中学, 他写到, "从幼儿园开始就建立了一个僵化的考试制度, 这是对人的天赋与青春的浪费. 天天做练习, 像一个体操运动员一样, 上百次地重复同样的动作, 只为在考试中不出错."

范教授并不完全同意这样的观点 (范教授当然知道中国的"应试教育"所带来的危害. 但是他认为不能简单地反对"熟能生巧", 还是要进行必要的操练. 有一篇新加坡关于范教授的报道, 标题就是: "有一点压力不一定是坏事"). "太大的压力肯定不好, 但是有一点压力并非一定是坏事情. 英国的一些学生就可能在数学上缺乏足够的压力." "如果说严格指的是要孩子们认真听讲, 集中注意力, 老师不用在纪律的维持上浪费时间, 那当然是必要的. 而且, 老师们会不会遇到能力稍逊的或者有社会问题的学生呢? 当然会了! 对这些学生而言, 严格是需要的, 这就是文化."

看西方和看东方: 华人数学教育正在走向世界

——记韩国首尔的《2012: 全球华人数学教育论坛》

325035 浙江省温州大学 方均斌

12年前, 在东京举行的第9届国际数学教育大会上, 举行了首次《全球华人数学教育论坛》. 今年7月11日晚, 在韩国首尔举行的第12届大会, 又举行了近两个半小时的《2012年全球华人数学教育论坛》, 到会200余人, 座无虚席. 笔者做了全程录像, 经过会后整理, 将自己认为重要的部分写成此文, 仅供参考.

确实, 在一个使用英语的国际性大会上, 居然有一个可以讲中文的"华人论坛", 本身就是一则新闻. 应该说, 这是华人数学教育受到国际重视的一种反映. 我们在看西方, 向西方数学教育学习, 与此同时西方也在看东方, 考察东方的数学教育. 华人数学教育正在一步步地走向世界.

论坛由范良火(英国南普顿大学)和李士锜(华东师范大学)两位教授主持. 主题是: "国际和比较视野下的华人数学教育: 特点、优点和缺点."

英国最好的私立学校St Paul's学校的Martin Stephen博士, 刚刚花了18个月周游世界以寻找不同于本土的教育体系, 包括远东的教育体系. 他说, "在新加坡, 教师的数学教学, 不管是理论上还是实践上都是充满智慧的. 他们达到了我们想要达到的结果, 但当你考察他们如何做到的时候, 你会发现并没有什么新的东西. 他们所用的一切, 我们在上世纪六十年代之前其实都使用过. 在那里, 我看到了优秀教师使用传统的方法, 包括记忆背诵, 而这些在今天的英国教室中是看不到的." Stephen博士说, 课堂文化可以反映出亚洲社会更宽泛的心态. "亚洲社会尊重学习, 尤其是数学. 这种尊重学习的文化是对老师的奖励, 也带来了学生对老师的尊重. 作为文化影响的结果, 你总能看到教师们更严肃、认真地对待自己的工作."

那么, 我们可以改变英国与数学教育相关的文化氛围吗? 范教授说, "在英国的很多学校, 我已经看到了改变, 比如安排一些很好的数学练习. 不过, 在其他方面还没有看到我们所期望形成的那种文化氛围."

读了以上的报道, 我们确实看到了东西方文化上的差异会带来数学教育上的差异. 文化没有好坏之分, 只是互相借鉴, 更多地融合. 我们一些传统做法, 正如21世纪以来课程改革所指出的那样, 存在着许多弊病, 尤其是学生缺乏自主创新的意识和能力, 应该大力改进. 但是, 我国固有的一些传统也有其一定的合理性. 这些西方曾经使用过而后来被丢弃的做法, 现在反过来要向中国、新加坡等亚洲国家学习, 令人感慨.

改革是必要的, 但是"矫枉不能过正". 还是费孝通先生说得好: "各美其美, 美人之美, 美美与共, 天下大同". 我们的数学教育确实有"美"的一面, 同时也要学习别人之"美". 不可夜郎自大, 但也不能妄自菲薄. 我们应该有足够的自信.

(本刊记者综合报道)

论坛首先由本次国际数学教育大会的主席赵升济 (Sun Je, Cho) 教授讲话. 他对《论坛》表示祝贺, 并在会议上"秀"汉字, 揭开了《论坛》使用中文的序幕.

主持人事先安排了 11 位演讲人, 每位发言 10 分钟. 他们是:

范良火 (英国南安普顿大学), 李叶平(美国德克萨斯州 A&M大学), 蔡金法 (美国特拉华大学), 梁贯成 (香港大学), 黄毅英 (香港中文大学), 谢丰瑞 (台湾师范大学), 黄幸美 (台北市立教育大学), 张英伯 (北京师范大学), 李士锜 (华东师范大学), 马云鹏 (东北师范大学), 金美月 (辽宁师范大学).

各位学者的演讲, 如同梁贯成教授所言, 围绕着华人数学教育的"产出"、"投入"和"过程"三个维度展开. 数学教育的"产出"是指我们教出来的学生的数学学业成绩和态度. "投入"是指我们在数学教育研究上所下的功夫. "过程"则是指我们的数学教育实践.

关于上海学生在PISA考试中的表现, 这是《论坛》的第一个焦点. 梁教授认为我们在"产出"方面做得很好. 历次的国际数学测试, 包括TIMSS和PISA, 中国大陆、香港、台湾、澳门的成绩都相当不错. 当然, 引起广泛关注的是最近一次的PISA数学测试, 中国上海位居第一, 新加坡第二, 英国排在第28位. 于是英国主流媒体《每日电讯报》记者曾经采访范良火教授, 询问其中的秘密. 范良火和梁贯成都认为, 这种差异大多是文化上的不同, 并没有什么特别的秘密.

有一位在美的华人教授问: 上海学生在PISA测试中成绩优秀是否与上海的经济发达有关? 华东师大的徐斌艳教授爆料了一个未公开的测试结果: "我们曾做过一次未公开的学生能力测试, 选取了上海、克拉玛依、郑州、沈阳四个地区, 采用的是TIMSS测试框架 (与PISA测试有所不同), 结果上海学生成绩仅排在第三. 郑州排名第一, 后面依次为沈阳、上海、克拉玛依. "徐教授补充说, 在PISA测试中, 上海学生是因为处于底部成绩人数少, 即最低分数较高, 从而平均成绩相对优异, 并非是因为优秀的学生多而名列第一, 所以我们也很冷静地对待这种结果, 它不过是一个检测而已.

数学英才教育的缺失. 关于优秀学生的表现, 张英伯教授痛感中国数学英才教育的落后. 她报告了今年5、6月和几位大学教授、中学教师访问法国、英国、以色列三国的一点感想. 以下是他们在法国的一些见闻: "在法国路易大帝中学, 我们看到重建于18世纪的校园, 教室内四面白墙, 只有一块黑板, 没有多媒体设备. 在商科预科的一节数学课上, 教师在黑板上非常准确、形象地在平面上表示 ε 和 δ 的取值区间. 这只是该校上课的一般水平. 在法国, 预科班学生要在两年内学习数学分析、高等代数、近世代数、微分方程、理论概率、数论、复变、实变等课程, 这些课程都是由同一名数学教师教授. 第二天, 我们在巴黎北郊的一所中学听了一名教师接连三节的数学课. 第一节课是10年级的三角函数, 第二节是10年级兴趣小组的图论, 第三节是11年级兴趣小组的群论, 老师非常清楚的给出了群的定义. 反观我们的高材生, 高中数学围绕高考题打转、空转. 两相对比, 当知我们努力之所在了. "张英伯教授认为: "教育的原则在于公平, 要保证每个孩子有受教育的权利. 但教育的精髓在于因材施教, 分流培养. 60多年来, 我们把精英与大众一勺烩了. 所以到今天才有'钱学森之问'和很多反思. "

数学教育研究的软肋. 论坛的第二个焦点, 涉及梁贯成教授所说的关于数学教育研究的"投入". 梁教授认为, 我们在数学教育研究的"投入"不足, 理论方面还是很弱, 其中最重要的地方就是研究方法. 研究方法直接决定着结果的正确与否, 你的结论成立与否要靠数据来说话.

毋庸讳言, 数学教育的学术话语权在西方. 我们必须看西方, 向西方学习. 台湾师大的谢丰瑞博士在发言的最后说: "我希望参与国际研究的华人: 第一, 要努力尝试融入西方的环境; 第二, 要发展我们自己的观点". 北京师范大学曹一鸣教授有一些不同的意见. 他质疑"融入西方的环境", 应该是"共融"才对; 中国其实也有数学教育理论, 只不过没有使用西方的语言罢了. 谢博士回应说: 我的第二

点就是说要发展自己的观点, 有自己的理论. 只是我们暂时没有自己的关于师资培训的理论, 西方没有采用其他东方的理论, 于是只好采用MPCK的理论, 这可能也与语言的区别有关. 如果有一天是别人来采用我们的理论, 那就太好了嘛! 主持人范良火说, 他们两人的观点并没有矛盾, 都是要发展自己.

从《论坛》的许多发言来看, 进入21世纪以来的10多年间, 中国数学教育已经做了不少的工作, 正在一步步地前进.

2004年《How Chinese Learn Mathematica》问世, 备受关注. 美国的600来个图书馆都有收藏. 范良火宣布《How Chinese Teach Mathematics》也即将推出.

华东师大的王建磐在会上介绍《Review the History of Mathematics Education in China》的出版. 这是2008年第11届国际数学教育大会上"中国展示"的英文稿.

李叶平教授介绍他即将出版的新作《How Chinese Teach Mathematics and Improve Teaching》. 该书的特色是: 不仅关注中国数学教师在课堂内部的教学, 也关注事前的备课以及课后的总结或辅导; 此外, 并不是只关注个别教师的教学, 也涉及了学校管理人员及教育政策决策人的相关工作.

这些著作的出版, 标志着华人的数学教育研究正在一步步地走向世界.

其实, 西方也在看东方. 近几年来, 李士锜教授多次应邀去欧美国家介绍中国大陆的数学教育. 他在发言中说, 当今国际数学教育领域, 占统治地位的教育理论与信息基本上是出自西方学术界, 再传播至东方. 但是我们东亚地区乃至全世界的华人数学教育有自己的文化传统. 在过去的15—20年, 我们一方面向西方学术界学习, 同时我们也能为国际数学教育研究贡献出自己的力量. 我们需要保持自己的民族性, 努力促进国际数学教育研究的多样化.

关注数学教师的成长. 这次《论坛》中有三位发言都集中在"数学教师的成长"的课题上. 谢丰瑞博士发言说, 我从2002至今的8年中, 参与了Mathematic Teaching of the 21 Century Study (21世纪数学教学) 的国际研究. 它是第一个大样本的有关数学师资培训的研究, 单在台湾当时就包括了六百多位职前老师. 通过收集资料, 去考查老师. 这一研究采用数学教学内容知识 (MPCK) 的理论框架. 现在已经有一本书问世.

比如MPCK, 是由美国人Lee Shulman做出来的, 其中有很多题目并不适合东方人去做, 至少是不适合台湾. 这需要我们进行研究补充修改. 例如, 关于数学题的标准答案, 各国的观点是不一样的. 这里举一个简单的例子: "对任意的正整数n, $2n$与$n+2$中哪个更大? "有些国家的学者认为给出以下的图表就行了. 可是对我们台湾来讲, 只给出四个数不够, 必然要靠一个推导来论证. 这就是差异, 需要贡献我们华人的意见.

n	$2n$	$n+2$
1	2	3
2	4	4
3	6	5
4	8	6

李士锜教授的发言也有关数学教师的发展. 他提到2009年在美国南加州召开了一次关于中美两国数学教师发展的研讨会. 会上, 美国科学院和美国数学教育委员会邀请了中国大陆3个城市 (北京、上海、苏州) 9名人员, 每个城市派出1名优秀中学教师、1名教研员及1名大学教师. 美国方面也有相应的人员参加 (现场在座就有李叶平、安淑华、鲍建生等参加). 研讨会形成一本总结手册, 提出了中美数学教育领域对比明显的7条结论. (中国方面的特点)

* 通常数学教师就是专家, 即使是小学也是如此;

* 中国的数学教学是公开的、促进合作的、带有标准和结构的实践活动, 与之对比, 在美国教学则是私人的;

* 教学专业具备清晰的专业等级, 即教师也有竞争体制, 这在世界范围内也是少有的, 从新教师到优秀教师有明确的、正式的职称;

* 优秀教师会继续在教学岗位上, 并利用课堂为基地, 承担其他的责任, 这些工作都是在学校里公开的条件下完成的, 而在美国, 一名教师成长为"master teacher"往往会被提拔到一些非教学岗位上去;

∗ 教师专业发展是嵌入在学校的日常工作中的;

∗ 国家课程能够让教师拥有更多的时间在备课中持续地加以改进;

∗ 在形成如何改进教学经验的过程中, 教师是非常积极的.

这一对比, 很鲜明地反映了中国特色. 这样的结果倒也无需用"数据"来论证.

范良火教授的演讲也集中在"教师的成长". 他首先提到"数学教师的专业化培养和发展"问题. 他认为, 数学教师职前培养的专门化和数学学科结构的专业化, 使得数学教师只教数学. 这是我们的一个优点, 我们应该保持. 但是要注意发展数学教师关于其他学科知识 (水平), 加强与其他学科教师专业的交流, 用其他学科知识丰富数学教育 (知识), 防止割裂. 其次, 中国数学教师职后发展的多样化和系统化, 值得高度肯定. 因为中国有特殊的体制, 有省教研室、市教研室、县教研室等, 也有省教育局、市教育局、县教育局等, 有一个 (管理) 系统, (在管理上) 比较多样化和系统化.

更深刻地认识自己. 《论坛》的第三个聚焦领域是对我们自己实践的总结与认识. 这些演讲各具特色.

马云鹏教授分析了中国大陆小学数学课的特点. 他的研究团队搜集到从1992年到2010年所有观摩课的获奖录像, 特别地, 2008年教育部在全国搜集了800多节课, 然后评选了55节课获得一等奖 (马教授是评委之一). 他对所搜集到的获得一、二等奖且具有可比性的典型课做了课堂分析, 认识到: 按照课程改革的理念, 近十年小学数学课堂发生了许多好的变化. 但也有二十年来没有改变的东西: (1) 课堂结构没有变, 还基本上是"复习–教学–练习–小结"的流程; (2) 教学活动依然以公共活动为主, 统计数据显示个人活动甚至不超过30%, 主要还是通过教师提问–学生回答的互动式教学.

这样的研究, 是很有意义的. 当时徐斌艳教授 (上海华东师范大学) 曾提问该研究所用的分析软件是什么? 马云鹏教授回应说: 我们用的是很笨的方法, 就是通过听录音, 看录像, 一点点去记录它的时间, 进行分析.

黄毅英教授的演讲指出, 我们在积极做研究时, 要实事求是地看待我们中国的数学教育, 不要把自己放得太小, 也不能放得太大 (既不妄自菲薄, 也不妄自尊大). 他做了以下的反思.

反思一: 成也孔子, 败也孔子? 当谈及中国教育时, 孔子是绕不开的话题. 但是我们总是把中国教育的坏现象归结到孔子身上, 某些情况下我们把孔子完全打垮了. 是否合适?

反思二: 中国的传统学说里常常有不少篇幅谈到"悟", 所以中国古代教育并不是我们现在所想象的全部都是"填鸭式"的满堂灌.

反思三: 何为教? 何为学? 什么是学习? 其实是一种"熟练"的过程. 例如学习弹钢琴, 要做到脱离曲谱才算是学会. 又如很多禅宗书籍提到的佛教核心"how to not to think", 也就是"技到无心始见奇". 中国传统观念中"教"含义是非常广泛、多元化的, 不仅仅是老师"教"学生, 也可以是自己"教"自己, 还包括大自然"教育"人类.

反思四: 深层程序的内涵是什么? 对于"变式教学"我们需要扪心自问: 这是不是真正的"中国式"数学? 是不是普遍存在? 是不是只有形式而没有掌握精髓?

反思五: 规范和自由之间. 正如硬币有正反两面, 我们的教育也许也需要另一种哲学: 在"空"与"有"之间. 也就是在"规范"与"自由"之间寻求平衡.

最后, 黄毅英指出, 《论语》中对孔子的教学评价是"夫子淳淳然善诱人", 那就是孔子不是把知识单纯地传输给学生, 而是引诱学生自己去学习, 这也是我的教学观点.

台湾的黄幸美教授谈到了台湾20年来的数学教育改革. 早在1993年, 推行"问题解决"思考的教学, 让小朋友进行合作解题学习, 同时发展了很多校园数学, 尤其是所谓建构性的数学, 那个时候非常流行. 后来, 因为发现小孩子在讨论中花了过多的时间, 数学的基本能力下降, 于是有一点收敛回来. 从2003年一直到现在, 再一次的把数学的计算能力与数学的概念理解列为同等的重要.

目前台北市推行班班有电脑, 班班有电子白板, 那怎么样把教材变成E-textbook,而不是只把教材扫描放到电子白板上就完事? 使用投

影机等等设备，教室的光线很暗. 老师要用银幕来(讲课)，同时还要巡视，要求老师既要和学生接近，了解他们的思想，又要去操控投影，等等，这些都可能影响师生互动. 我们担心以后的老师就是一个嘴巴和一个手指头(进行教学)，这样教师就不太有机会走下讲台去看小孩子的解题状况和参与他们的讨论，这是我们有点担心的. 所以，目前为了改善(这种状况)我们很积极地去做教师专业发展培训.

金美月教授(辽宁师范大学)的发言题目是：中国学生数学情感研究. 2001年开始的课程改革，把情感列为一个很重要的课程目标. 她注意到东北三省的少数民族，包括朝鲜族、蒙古族，他们有自己的文化、民族语言，还有自己的一些文字，是典型的少数民族. 那么，他们的数学情感会是什么样子的？这些研究给我们在教学方面的启示又是什么样子的？金教授就信念、态度、动机三方面进行了分析.

蔡金法教授(美国特拉华大学)的发言，为如何开展"数学教育研究"提供了一个样本. 他说，我们有一个小小的团队，做了三方面的事情. 首先是做中国跟美国这两个国家学生的学习与教学的比较；第二个是关于数学课程的研究；第三个是关于教学探索项目. 教学探索项目是用问题解题作为教学方法，看看"教师的教跟学生的学" 到底有怎么样的影响.

蔡教授较详细地介绍了关于家长的参与，即怎样看父母亲的参与对孩子数学学习的影响. 计划从五个方面来观察父母在家里的角色：

第一，鼓励者，鼓励孩子读的好.

第二，资源的提供者.

第三，监控者. 监控孩子用时间的状况，而不是说一天24小时经常地在玩电子游戏，而是看他到底多少时间看电视、多少时间学习等等，就是监控的作用.

第四个作用就是真正的对数学的内容进行指导. 学生不会做的题目，父母帮着做.

最后一个是对数学学习的咨询者. 咨询者的意思就是孩子在某个数学上有困难，就帮他，就像顾问一样帮忙分析一下为什么他在数学上有这么大的困难，怎么来克服. 研究中用这五个方面来预测学生成绩，大都非常有效.

第二个研究是关于课程改革. 研究对象有十个学区，对十个学区差不多都有2万的学生进行跟踪，包括初中生和高中生. 目的是要弄清楚，当这些学区采用这个改革型课程的时候，对学生的学习到底有没有影响，接下来蔡教授展示的是：看其中的一个变量——"愿意改革"的程度，对学生的学习影响有多大. 研究者从四个方面来看：(1)学区主管对改革计划的支持；(2)校长对改革计划的支持；(3)教师对改革计划的信任；(4)学区对改革计划支持的连贯性. 把这四个方面作为一个衡量这个学区"愿意改革"的程度.

接下来蔡教授给大家看了两张图表. 一张表是从1998年开始到2004年的成绩，他们跟踪学生5、6年，这里(图表中)的每一个点，表示前面一个到后面一个自变量的差别，横向的坐标表示"愿意"的程度是多少，纵坐标表示的是"正"的还是"负"的，通过这个图表很快就可以看到，如果"愿意"的程度越高，后面的成绩减去前面的成绩"正"的就多，这说明"愿意"程度对学生的学习有很大的影响. 如果这个"愿意"程度很负面，学生的学习成绩也是很负面的，用改革型教材，不但没有帮助反而有害.

蔡教授的发言引起了许多讨论. 不过，给笔者感触最深的是，如何衡量"家长参与"，和"愿意改革"这样的概念，蔡教授的设计体现了如何"用数据说话"的要求.

英国的琼斯教授，在论坛上作了"英国人眼中的中国数学教育"的发言. 他访问中国之后认为，中国有两个长处，一是有许多优秀的研究学者，如顾泠沅、郑毓信、鲍建生、曹一鸣、丁莉萍等等. 二是有许多优秀的理念，如"变式教学"，"双基发展到四基"教学等等. 他期待着这些理念的发展.

这次《论坛》，到会者多，专家云集，气氛热烈，可惜时间只有两个多小时. 2012年7月11日晚19点25分，主持人范良火宣布《论坛》结束.

让学生在探究中学习

——以《三角形三边关系》为例

362000 福建泉州鲤城区教师进修学校 曾泽群
362000 福建泉州实验中学 杨 峰

探究学习是让学生经历从未知到已知的过程, 在这一过程中往往又伴随着合作. 探究学习追求的不仅仅是一个结论, 更是一种经历, 它对于提高学生发现和提出问题、分析和解决问题的能力起着至关重要的作用. 在进行《三角形三边关系》的教学设计时, 笔者兼顾华东师大版实验教材初中几何"观察与操作, 感知确认并辅以数学说理"的教学原则, 按照"提出问题——解决问题——形成数学结论"的过程来组织教学, 让学生在探究中学习.

一、实验操作——提出问题

为了将发现和提出问题的机会留给学生, 笔者设计了一个实践与反思的活动. 具体如下:

(一) *操作活动*

请同学们从预先准备的八根小棒(其中三根小棒长度均为4cm, 另五根小棒长度分别为 2cm, 3cm, 5cm, 6cm, 7cm) 中任意取出三根摆三角形 (至少五次以上), 并记录每次所取三根小棒的长度及实验操作的结果.

(二) *活动反思*

根据实验操作所获取的数据及对应的结果, 想一想你能从中得出什么结论, 并提出相关的探索问题.

该活动创设了一个让学生动手操作的情景, 然后通过活动反思中所设置的开放性问题, 活跃学生的思维, 激起学生的问题意识, 并从中体验收集数据、分析数据、获取结论或提出问题的过程, 逐步学会透过现象看本质.

活动过程: 先独立完成再小组讨论、汇总, 最后班级交流、互动. 在班级交流展示中, 采取"谁先完成, 谁就先将解答展示到黑板, 他人作补充"的方式. 这样可节约展示的时间, 方便提前完成任务的同学思考、消化其他同学的解答, 以弥补自己思维上的空缺, 增加思维交流的时间与空间. 在班级互动中, 教师根据需要, 在投影仪下借助教具再次展示实验个例 (如图1、2、3, 将两根小棒的一个端点分别与小棒 AB 的两端点对接固定, 然后转动这两根小棒, 看看它们的另一个端点是否会交汇于一点, 是否会构成一个三角形), 以便全体学生感悟、理解由本活动生成的结论:

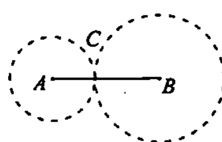


图1

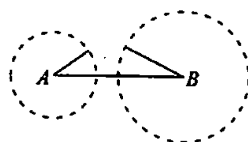


图2

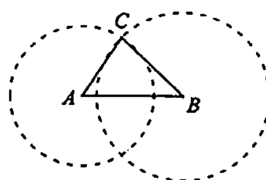


图3

操作结果出现以下两种情况.

(1) 不能构成三角形, 如: 2cm, 3cm, 5cm 与 2cm, 3cm , 6cm;

(2) 能构成三角形, 如: 4cm、4cm、4cm (等边三角形), 4cm、4cm、7cm (等腰三角形), 4cm、3cm、5cm (直角三角形), 7cm、6cm、5cm (锐角三角形), 7cm、6cm、3cm (钝角三角形).

由操作结果得到结论: 并非任意的三条线段都能组成一个三角形;

提出探究问题: 怎样判断三条线段能否构成一个三角形? 或另一个等价的问题: 已知两

条线段, 怎样选择第三条线段, 才能构成一个三角形?

二、解决问题

(一) 分析数据　探求结论

由操作结果提出的问题是一个条件未知的探究问题, 这对于初一学生来说是一个挑战, 为了提高学生探究的有效性, 教师设计了以下系列问题来引导学生探究学习.

问题1: 你将采取什么方法、从哪里入手解决问题: "怎样判断三条线段是否能构成一个三角形?" (在解决了问题1的基础上提出问题2)

问题2: 从摆三角形时记录的数据及结果入手, 观察三条线段构成三角形与这三条线段的长度的关系, 并写出探究结果. (在解决了问题2的基础上提出问题3)

问题3: 反之, 构成三角形的三条线段是否会满足任意两条线段长度之和大于第三条线段的长度.

这是通过相互关联的问题串来引导学生探索. 前面两个问题, 对于首次接触"由形转化成数进行问题解决"的学生来说非常必要, 问题3则便于与三角形三边关系接轨, 为后续由现实背景抽象出数学模型服务. 有了问题引导, 就可以减少学生盲目的尝试, 有效地利用课堂时间, 从而避免牧羊式的教学, 体现新课程的教师角色.

对于问题1, 学生借助前面实验所获得的经验, 再经过生生讨论、交流, 师生互动, 不难得出三条线段能否构成一个三角形与这三条线段的长度有关. 因此, 解决前面提出的问题实际上就是解决问题: 三条线段的长度满足什么关系时, 这三条线段才能构成一个三角形. 而解决这个问题应该从摆三角形时记录的数据及结果入手. 这样, 形的问题就转化成数的问题来研究, 体现了数形结合思想.

对于问题2, 学生先凭借直接思维, 后用计算, 再用实验 (叠放比较) 进行操作验证, 最后通过互动获得探究结果: 任意两条线段长度之和大于第三条线段的长度, 这三条线段可构成一个三角形, 否则, 不能构成一个三角形.

对于问题3, 学生的回答是肯定的.

(二) 动态实验　直观验证

为了验证问题3答案的正确性, 教师可借助多媒体辅助教学, 利用几何画板动态地演示其几何模型的变化过程: 如图4, 在几何画板中, 用鼠标拉动下面右边三角形的顶点 A、B、C 中的任意一点, 即改变线段 AB、AC、BC 的长度, 随之左边各线段的长度、线段的长度和就会显示相应的数据, 这样, 学生对比"数"与"形", 直观地验证以上答案.

$m\overline{CB}+m\overline{AC}=6.68$厘米　$m\overline{BA}=3.65$厘米
$m\overline{AC}+m\overline{BA}=6.07$厘米　$m\overline{CB}=4.26$厘米
$m\overline{CB}+m\overline{BA}=7.91$厘米　$m\overline{AC}=2.42$厘米

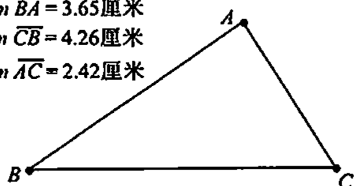


图4

三、形成数学结论

(一) 数学思考

问题1: 如果略去三条线段摆三角形的背景, 从三角形切入, 你能得出三角形三边关系的有关结论吗?

问题2: 将文字语言 (三角形的任何两边之和大于第三边) 转化成图形语言及符号语言.

问题3: 联想, 能利用前面学过的有关基本事实对"三角形的任何两边之和大于第三边"进行说理吗?

问题4: 数学结论:"三角形的任何两边之和大于第三边"是否可以延伸变换得出其他形式的结论?

通过这些问题让学生经历数学化的过程, 提高三种语言互化的能力, 在实验操作、感知确认的基础上进行理性的思维, 可以发展学生的符号意识、逻辑推理能力.

对于问题3, 学生可以将三角形看成联结两点的线有两条, 一条是线段, 一条是折线. 这就使得学生联想到用前面学过的基本事实:"两点之间, 线段最短"进行说理.

对于问题4, 学生对三角形三边的关系进行变形后, 便可筛选出它的两个等价的命题: 即"三角形的任意两边之差小于第三边"和"三角形的任意一边大于其他两边之差的绝对值, 小于其他两边之和", 从这也就解决了第一层面提出的问题: 已知两条线段, 第三条线段怎样选择, 才能构成一个三角形.

(二) 动态变化　直观感受

举反例也需分析推理

——由平行四边形的判定衍生的命题真假说起

200090　上海市新大桥中学　赵艳凤

在复习平行四边形的判定定理时, 为更好地掌握判定, 明确由判定衍生出的命题的真假, 笔者设计了这样一道条件开放的题目, 以引起学生的注意和思考.

题目　如图1, 在四边形$ABCD$中, 对角线AC、BD相交于点O, 在下列四个选项中任选两个作为条件, 以平行四边形作为结论构成命题, 共有几个命题, 其中有几个真命题? (注: 本文所说的四边形都是凸四边形)

① $AD/\!/BC$, ② $AO=OC$, ③ $\angle BAD=\angle BCD$, ④ $AB=CD$.

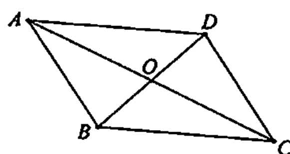


图1

显而易见, 四个条件共有六种不同的组合, 即①和②; ①和③; ①和④; ②和③; ②和④; ③和④, 与结论形成六个命题.

为了加强学生对问题4结论的进一步理解, 教师可借助几何画板或教具, 动态地演示该结论的几何模型的运动变化过程:

如图5, 教具演示(边AB、BC是定值且$AB>BC$, 点A固定, 让点C沿直线AC滑动):

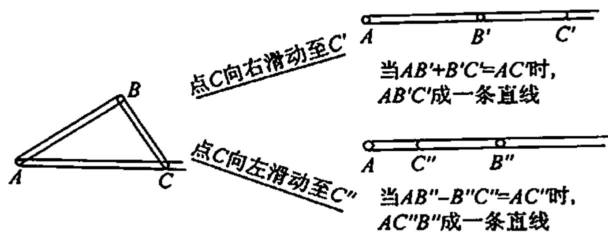


图5

或几何画板演示(如图6, $\triangle ABC$中, 边AB、BC为定值且$AB>BC$, 点C在以BC长为半径的圆B上运动):

这是通过几何画板或教具的演示(实验操作), 让学生直观感受经过变形后所得的数学结论的正确性, 使学生知道可以用运动变化的观点来思考问题, 解决问题.

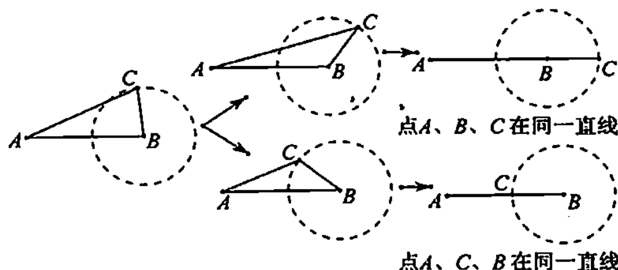


图6

纵观整个教学设计, 学生不但可以掌握三角形三边关系的知识, 为三边关系的应用作好铺垫, 而且可以经历分析数学事实, 提出有意义的数学问题, 进而解决问题(探求数学结论, 并进行说理)的数学探究全过程, 达到以知识为载体, 培养学生的问题意识, 提高学生分析和解决问题的能力的教学景观. 为新课程所倡导的学习方式(探究学习)作积极有效的尝试.

参考文献

[1] 曾泽群. 如何进行数学问题情境教学[M]//曾大洋. 如何上好一堂数学课. 上海: 华东师范大学出版社, 2009.

前三个命题, 即分别以①、②; ①、③; ①、④为条件的命题, 它的真假显而易见, 前两个是真命题, 后一个是假命题, 反例是等腰梯形. 本文主要针对后三个命题进行分析.

1. 以②、③为条件构成的命题

这是个假命题, 反例为"筝形". 但如果将此命题中的$\angle BAD=\angle BCD$换成另一对角, 即$\angle ABC$与$\angle ADC$相等, 构成的命题还是假命题吗?

可以肯定地说, 这个命题是真命题, 证明如下:

如图2, 由$\angle ABC=\angle ADC$可知$\triangle ABC$的外接圆与$\triangle ADC$的外接圆是等圆, 画出这两个圆, 可知由这两个等圆组成的组合图形是中心对称图形.

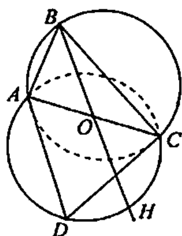


图2

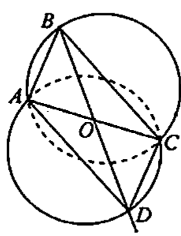


图3

连结BO并延长, 交另一圆于点H.

$\because$ 对角线BD平分AC,

$\therefore$ BD必过AC的中点O,

又BH也过点O,

根据两点确定一条直线可知, BD与BH重合, 即点D与点H重合(图3).

$\because$ 点O是对称中心,

$\therefore$ 点B与点D关于点O成中心对称, 所以$BO=DO$,

又$AO=CO$,

$\therefore$ 四边形$ABCD$是平行四边形.

所以此命题是真命题.

2. 以②、④为条件构成的命题

对于此命题的真假, 可先用分析法进行判断. 如图4, 若要四边形$ABCD$成为平行四边形, 需有$BO=OD$, 若$BO=OD$, 必有$\triangle ABO\cong\triangle CDO$, 但根据条件$\angle AOB=\angle COD$, $AO=CO$, $AB=CD$, "边边角"不能够说明$\triangle ABO$与$\triangle CDO$一定全等, 自然四边形也就不一定是平行四边形了.

如何举出反例呢? 这要从"ASS"为何不能判定两三角形全等的角度去思考, 于是有了如下设计反例的方法:

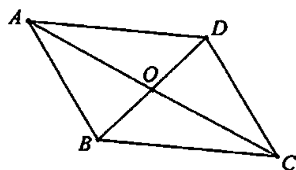


图4

如图5, 作平行四边形$AB'CD$, 连结AC、$B'D$, 交点为O, 并使得$AO>AB'$. 以点A为圆心, AB'为半径画弧, 则该弧必与线段OB'相交, 设交点为B, 连结AB、BC.

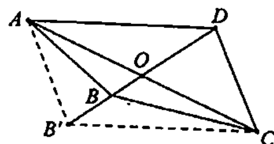


图5

这时, 在四边形$ABCD$中, $AO=CO$, $AB=CD$, 但不是平行四边形.

3. 以③、④为条件构成的命题

在$\triangle ABD$与$\triangle CDB$中, 只有$\angle A=\angle C$、$AB=CD$、$BD=BD$, 不能说明这两个三角形全等, 也就不能说明$AD=BC$, 所以这个命题是假命题. 但是由于找不到反例, 有些学生动摇了, 并尝试证明这个命题为真命题, 并且给出了如下证明:

证明: 如图6, 分别过点B作$BF\perp AD$, 过点D作$DE\perp BC$, 垂足分别为点F、E,

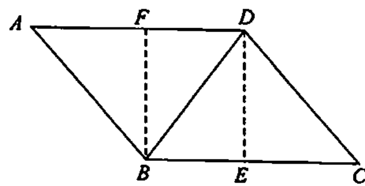


图6

$\therefore$ $\angle BFA=\angle DEC=90°$.

在$\triangle ABF$与$\triangle CDE$中,

$\because$ $\angle BFA=\angle DEC$, $\angle A=\angle C$, $AB=CD$,

$\therefore$ $\triangle ABF\cong\triangle CDE$,

$\therefore$ $AF=CE$, $BF=DE$.

在$\text{Rt}\triangle DBF$与$\text{Rt}\triangle BDE$中,

$\because$ $BD=BD$, $BF=DE$,

$\therefore$ $\text{Rt}\triangle DBF\cong\text{Rt}\triangle BDE$,

$\therefore DF = BE$. 又 $AF = CE$,

$\therefore AD = BC$. 又 $AB = DC$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

这个证明看上去无懈可击, 然而这个命题却是不成立的.

问题出在哪里? 当然是作图环节, 学生在符合结论的图形中进行证明, 自然也就发现不了问题. 怎样才能画出符合条件但不符合结论的图形呢?

(1) 利用平行四边形中存在的等边、等角, 构造反例图形.

如图7, 作平行四边形 $ABC'D'$, 使得 $AB > BD'$, 在 AD' 上取一点 D, 使得 $BD = BD'$, 然后将 $\triangle D'BC'$ 绕点 B 顺时针旋转, 使得 DB 与 BD' 重合, 点 C' 落在点 C 处. 这样构造的四边形 $ABCD$, $AB = CD$, $\angle A = \angle C$, 但四边形 $ABCD$ 不是平行四边形.

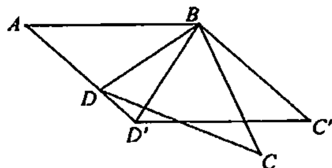


图7

如图8, 在得到的四边形 $ABCD$ 中再作 $\triangle ADB$ 和 $\triangle BDC$ 的高 BF 和 DE 时, $\triangle ADB$ 的高 BF 不在三角形的内部, 而是落在了三角形的外部, 虽然两个直角三角形依然全等, 但是, 线段 AF 与 AD、DF 的关系发生了变化, 在学生证明使用的图形中, $AD = AF + DF$, 这里 $AD = AF - DF$, 无法证得 AD 等于 BC, 所以学生的证明是错误的.

(2) 利用等腰三角形中存在的等边、等角, 构造反例图形.

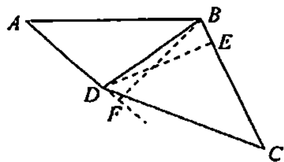


图8

如图9, 作等腰 $\triangle ABE$, 其中 $AB = BE$, 则 $\angle A = \angle E$. 在边 AE 上任取一点 D (不是 AE 中点), 将 $\triangle BDE$ 沿 BD 的垂直平分线翻折, 得 $\triangle DBC$, 则 $\triangle BDE \cong \triangle DBC$. $\therefore CD = BE$, $\angle C = \angle E$.

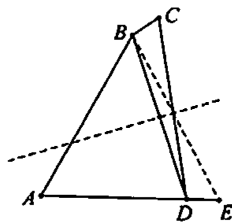


图9

$\therefore$ 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = CD$, $\angle A = \angle C$, 但是四边形 $ABCD$ 不是平行四边形.

(3) 利用等腰梯形对角线相等, 构造反例图形.

如图10, 作等腰梯形 $BCED$, 其中 $BD /\!/ CE$, $BC = DE$, 所以 $BE = CD$, 易证 $\angle BCD = \angle DEB$. 再以点 B 为圆心, BE 为半径画弧, 交 ED 延长线于点 A, 连结 AB, 则有 $AB = BE$, $\angle A = \angle DEB$.

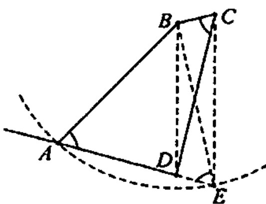


图10

此时在四边形 $ABCD$ 中, $AB = CD$, $\angle A = \angle BCD$, 但四边形 $ABCD$ 不是平行四边形.

(4) 利用全等三角形中的等边、等角, 构造反例图形.

如图11, 作 $\triangle AMN$, 使得 $AM > MN$. 以点 M 为圆心, MN 为半径画弧, 交 AN 于点 P, 连结 MP, 得 $\triangle AMP$.

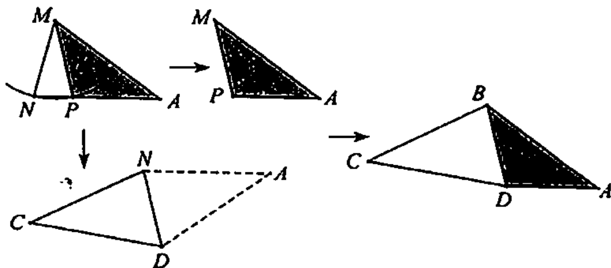


图11

将 $\triangle AMN$ 沿 AN 翻折, 再将得到的 $\triangle NAD$ 沿 ND 翻折, 得 $\triangle CND$.

将 $\triangle CND$ 与 $\triangle AMP$ 拼在一起, 根据以上作图过程可知, $MP = MN = ND$, $AM = AD = CD$. 因 $MP = ND$, 所以点 M 与点 N

用字母表示数

——中小学联合教研案例一则

362261 福建省晋江市慎中实验学校 龚维瑜

国家实施教材开放管理后, 教材供应市场出现了前所未有的繁荣景象, 但也给一线教师的教学工作带来一定的困扰. 如我市小学数学选用的是北师大版教材, 初中数学选用华东师大版实验教材, 高中数学则选用人教版教材. 不同学段选用不同出版社的教材, 给各阶段的教学衔接工作带来了诸多不便. 虽然理论上各版本教材的编写都是依据统一的课程标准, 但不同的编写者对"课标"的理解必定存在差异, 因而所编教材对各知识点的要求、把握就会有所差别! 因此, 开展中小学、初高中教学衔接的研究, 是一线教师一个不可回避的课题. 面对现实, 我们充分发挥九年一贯制学校的资源优势, 开展了"中小学数学衔接教学的研究"课题. 首先从教学设计的衔接为突破口. 本案例——"用字母表示数"就是在此背景下产生的. 作为一种尝试, 提供给同行参考.

根据"课标"关于知识点呈螺旋式上升的理念, "用字母表示数"被分别安排在北师大版实验教材四年级下册和华东师大版实验教材七年级上册. 我们在参与四年级"用字母表示数"的公开课教研活动后, 趁热打铁, 对"七年级的同课题教学设计应如何与四年级的教学有效衔接"进行了一次专题教研.

一、"课标"解读

新"课标"关于"用字母表示数"的要求是: 第二学段在"式与方程"中要求"在具体情境中会用字母表示数"、"会用方程表示简单情境中的等量关系"; 第三学段在"数与式"中要求"在现实情境中进一步理解用字母表示数的意义"、"能分析简单问题的数量关系, 并用代数式表示"、"能解释一些简单代数式的实际背景或几何意义"、"会求代数式的值". 于是我们围绕"课标"展开讨论, 确定教学目标为: 问题情境指向必须由"具体"转入"现实", 能力指向由"会用字母表示数"进入"理解用字母表示数的意义"上来, 并达到能自主"分析简单问题的数量关系, 用代数式表示", 实现由小学到初中对同一知识点——"用字母表示数"认识的升华.

二、教材分析

华东师大版实验教材把"用字母表示数"的相关内容安排在七年级第三章的§3.1列代数式中的1.用字母表示数, 2.代数式, 3.列代数式及§3.2求代数式的值. 根据四年级教师提供的资料看, 七年级教材提供的内容"1.用字母表示数"、"2.代数式"中的大部分问题情境在小学阶段已经接触过, 只是"代数式"的定义没有给出. 因此这些内容对学生来说缺少新鲜感, 不具挑战性. 若按教参安排用两课时去照本宣科是不可取的. 大家的共识是: 初中的教学设计应当在继承小学课程资源的基础上进行拓展, 实现有效衔接.

~~~~~~

重合, 点P与点D也重合, 分别记作点B、D, 得四边形$ABCD$. 在此四边形中, $AB=CD$, $\angle A=\angle C$, 但四边形不是平行四边形.

通过这样形式的复习, 学生不但掌握了平行四边形的判定, 还知道了由判定衍生的命题的真假, 并且在举反例的过程中, 复习了等腰三角形、梯形、平行四边形的性质以及图形的运动和如何用交轨法画图.
~~~~~~

三、教学设计

1. 导入衔接

为了达成有效衔接的目标, 我们首先从四年级老师所提供的教案中, 选择了三个活动来为七年级新课作导入, 目的是达到"在具体情境中会用字母表示数"这一课标要求.

四年级的资源再现:

【活动1】 问题情境的创设——猜数字游戏

今天的课, 老师先跟大家一起玩个游戏——猜数字. 先请4位小朋友与老师共同完成. 游戏规则是: 第一位同学把自己想到的一个数悄悄地告诉第二位同学; 第二位再把听到的数加10后将和数告诉第三位同学; 第三位把听到的数减6所得的差告诉第四位同学; 第四位把听到的数减2所得的差公布给老师. 这样, 老师准能猜出第一位同学所说的数字是多少. 信不信? 我们一起来试试……

本问题对七年级学生来说, 虽有点"小儿科", 但问题的简单性更容易激发学生全员参与的热情, 特别有利于调动一部分学困生的表现欲, 让他们一上课就有机会与同学一起分享到成功的愉悦.

【活动2】 分扑克牌活动

教师准备一副没有大小鬼的扑克牌, 分发给学生每人一张, 然后问: 你手中的牌是否都有一个具体的数字? 没有具体数字者请举手.

教师: 请问这位同学, 你手中的牌写的是什么?

学生1: 是A.

教师: 你可知道在扑克牌中, A可以用来表示什么的吗?

学生1: 代表数字"1".

类似地, 学生不难回答: J代表"11", Q代表"12", K代表"13".

教师: 原来, 扑克牌中是用字母来表示什么的?

答: 用字母表示数!

教师: 好的, 这就是我们今天要学习的课题——用字母表示数. 需要说明的是, 在扑克牌中, 字母表示的数字是固定的. 如: A代表"1", J代表"11", Q代表"12", K代表"13".

受到用字母表示数思想的启发, 现在, 我们回过头来研究【活动1】——猜数字游戏. 我们可以把第一个同学的数字先用个字母(如X)来表示, 则依游戏规则得$X+10-6-2=X+2$, 这里的X所代表的数字是第一位同学想到的数字, 是可以变化的, 它代表着未知的数字……

【活动3】 猜年龄

已知老师的年龄比班长的年龄大15岁, 请完成如下表格中的空格.

班长的年龄	老师的年龄	班长的年龄	老师的年龄
11	11+15	50−15	50
12	12+15		45
13	⋮		40
a			b

设计意图: 【活动1】猜数字游戏体现用字母表示数所带来的便捷, 再现"字母是可以用来表示未确定的数".

【活动2】分扑克牌活动的意图是再现字母也可以用来表示固定数的.

【活动3】猜年龄再现用字母表示数在特定的情况下是有范围限制的.

研讨: 这三个活动, 对于初中生来说虽然问题显得简单, 无法实现从"具体情境"到"现实情境"上升的课标要求, 但作为衔接是恰当的: 一是因低起点, 能照顾到各层次学生的学习; 二是由于问题属于"具体情境"的层次, 是新知识的起点, 具有衔接的作用, 有利于快速高效地把学生带入新知探究的境界.

但作为新课的导入, 【活动2】应在不影响其功能的前提下, 简化程序; 【活动3】为突出字母的取值要有范围的限制, 应拉大二者的年龄差距. 于是对【活动2】【活动3】做了如下改进:

【活动2.1】 看扑克牌活动

教师把三张分别是2、8、K的扑克牌分发给三位同学, 请问谁的牌大? 为什么? 从而诱导出K代表数字13的结论.

教师: 原来, 在扑克牌中我们是用字母来表示什么的?

答: 用字母表示数!

教师: 好的, 这就是我们今天要学习的课题——用字母表示数. 需要说明的是, 在扑

克牌中，字母表示的数字是固定的．如：A代表“1”，J代表“11”，Q代表“12”，K代表“13”．

【活动3.1】　猜年龄

已知小明的年龄比他爷爷的年龄小50岁，请完成如下表格中的空格．

小明的年龄	爷爷的年龄	小明的年龄	爷爷的年龄
1	1+50	55-50	55
2			60
13			80
a			b

教师：这里的a表示的是什么？爷爷的年龄如何表示？

学生：a表示小明的年龄，爷爷的年龄为$a+50$．

教师：那这里的字母a代表的数确定吗？

学生：不确定!——未知数！

教师：这就是说，用字母不仅可以表示一个具体的数，也可以表示一个未知数，用含有字母的式子同样也可以表示一个数量．

在数学上，我们把由字母和数用运算符号连结而成的式子叫做代数式(见教材定义)．如这里的a+50及$b-50$都是代数式．那你觉得a可以是多少？当$a=70$时，$a+50$=?……

教师：看来呀，用字母表示未知数的时候，在特定的情况下是有范围的．

2．探究拓展

新知探究的问题情境设计，首先必须关注“课标”关于“进一步理解”的层次，从而引导学生自主“分析简单问题的数量关系，用代数式表示”，并与衔接导入的问题情境相呼应，才能实现无缝衔接．于是我们确定了如下的【活动4】作为新知探究的问题情境．

【活动4】　猜纸团游戏

每人准备不少于30颗的纸团(注意：同桌两人的纸团总数尽量不相等)，平均分成三堆，请你按照老师的指令操作，老师定能猜出每个人中间一堆剩下几颗纸团．

指令1：从左堆中拿出10颗放入中堆．指令2：从右堆中取出5颗放入中堆．指令3：从中堆中取出与左堆余留的颗数相等的纸团放入左堆．

当学生操作完毕，老师立即宣布：每个人中堆有25颗纸团．

此时，学生会感到疑惑，每人的纸团数原本是不相等的，何以判断现在中堆的数都是25？值此，老师可以更换数字再次演示，然后引导学生破解奥秘，如表1．

当我们把10用a表示，5用b表示时，则中堆纸团数为$x+a+b-(x-a)=2a+b$，可见指令中的数字是可以变更的，只要会计算$2a+b$的值，就可猜出答案．

表1

自然语言(指令)	符号语言(列代数式)		
	左堆	中堆	右堆
平均分成三堆	x	x	x
1．从左堆中拿出10颗放入中堆	$x-10$	$x+10$	x
2．从右堆中取出5颗放入中堆	$x-10$	$x+10+5$	$x-5$
3．从中堆中取出与左堆余留的颗数相等的纸团放入左堆	$2(x-10)$	$x+10+5$ $-(x-10)$	$x-5$

设计意图：【活动4】猜纸团游戏是围绕目标——把“问题情境”指向由“具体的问题情境”转入“现实的问题情境”，“能力培养”的指向由“会用字母表示数”进入“理解用字母表示数的意义”来创设问题情境的，并凭借问题情境的趣味性和挑战性来激发学生自主“分析简单问题的数量关系”，进而引导学生“用代数式表示数量关系”，体会“求代数式的值及简单方程”等，把学习目标联成一串，一气呵成，用“课题”覆盖“课标”，问题驱动教学．

研讨：【活动4】虽然在知识层次上达到了“课标”关于“进一步理解用字母表示数的意义”的要求，但“数纸团”的活动属于游戏活动，其规则是老师设计好的，欠缺生活化的现实背景，难以体现“在现实问题情境中”的层次要求．因此，多数老师认为应增加一个具有“现实生活”背景的变式或开放题来拓展学生的思维．经大家共同设计，一个具有时代生活特征的问题情境终于出现了．

具有数学特色的词义辨析

200032 上海市徐汇区教师进修学院 陈永明

听了L老师的一节高三复习课, 这节课可以说独具匠心. 学生在学习过程中容易混淆题意, L老师将容易混淆的题目收集整理, 然后分7组呈现给大家. 每一组里一般有两道题, 粗看起来, 两者没有什么区别, 但实际上它们仅是形式相似, 而题意及解法各异. 下面就是这7组题.

(一) 集合问题

例1 (1) 集合 $M=\{y|y=x^2-1,x\in\mathbf{R}\}$, $N=\{y|y=-2x^2+2,x\in\mathbf{R}\}$, 则 $M\cap N=$______;

(2) 集合 $M=\{y|y=x^2-1,x\in\mathbf{R}\}$, $N=\{x|y=-2x^2+2,x\in\mathbf{R}\}$, 则 $M\cap N=$______;

(3) 集合 $M=\{(x,y)|y=x^2-1,x\in\mathbf{R}\}$, $N=\{(x,y)|y=-2x^2+2,x\in\mathbf{R}\}$, 则 $M\cap N=$______.

(二) 定义域问题

例2 (1) 已知 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$, 则 $f(2x-1)$ 的定义域是______;

(2) 已知 $f(2x-1)$ 的定义域是 $[0,1]$, 则 $f(x)$ 的定义域是______.

(这道题, L老师讲得有点费劲, 其实应该揭示这是复合函数的定义域问题, 这个复合函数是由 $y=f(u)$, $u=2x-1$ 组成的. 第(1)小题是求整个复合函数的定义域, 而第(2)小题则是求外层函数 $y=f(u)$ 的定义域.)

(三) 单调区间问题

例3 (1) 若函数 $f(x)=x^2+4ax+6$ 的增区间是 $[2,+\infty)$, 则 a 的取值是______;

【活动5】 猜商品价格活动

老师出示一件商品说: 这是件网购商品, 你能猜出老师花多少钱买下的吗?

老师把经过给大家说说, 第一次上网时发现该商品的售价与邮费刚好相等, 可惜当时没拍下. 过一段时间后, 第二次上网时发现该商品售价涨了13元、邮费涨了5元, 后来经与店家讨价还价, 不但售价降了, 而且邮费也降了10元, 老师当即拍下了这商品. 经过计算, 发现这一次讨价节省的钱正好是本次实付邮费的2倍. 同学们, 你该知道为这商品老师总共花了多少钱吧?

由于有了【活动4】的解决经验, 只须老师适当点拨, 把"节省的钱"、"实应付款"、"原应付款"和"实付邮费"之间的关系梳理清楚, 如表2, 学生可以尝试解答.

表2

自然语言 (指令)	符号语言 (列代数式)		
	售价	邮费	应付款项
售价与邮费相等	x	x	$2x$
售价涨了13元, 邮费涨了5元	$x+13$	$x+5$	$2x+18$
邮费降了10元		$x-5$	
节省的钱是 实付邮费的2倍			$2x+18-$ $2(x-5)$

开放设计: 请以应用"用字母表示数"的相关知识为目标, 设计一道猜价格的题目, 同学交换解答.

参考文献

[1] 张奠宙. 数学素质教育教案精编[M]. 中国青年出版社, 1999.

(2) 若函数$f(x) = x^2 + 4ax + 6$在$[2,+\infty)$上是增函数，则a的取值范围是______；

变式: (1) 设$f(x)=\sqrt{1+3^x a}$在$(-\infty,1]$上有意义, 则a的取值范围是______；

(2) 若$f(x) = \sqrt{1+3^x a}$的定义域是$(-\infty,1]$, 则a的取值是______.

(四) 定义域、值域为$\mathbf{R}$问题

例4 (1) 函数$y=\lg(x^2+ax+1)$的定义域为$\mathbf{R}$, 求实数a的取值范围;

(2) 函数$y=\lg(x^2+ax+1)$的值域为$\mathbf{R}$, 求实数a的取值范围;

(五) 反函数问题

例5 (1) 已知$f(x)=2x-1$, 求$f^{-1}(x-1)$;

(2) 已知$f(x)=2x-1$, 求$f(x-1)$的反函数.

(六) 对称问题

例6 (1) 函数$y=f(x)(x\in\mathbf{R})$满足$f(1-x)=f(1+x)$, 则$y=f(x)$的图像关于直线______成轴对称;

(2) 设$x\in\mathbf{R}$. 函数$y=f(1-x)$和$y=f(1+x)$的图像关于直线______成轴对称;

(七) 不等式有解与恒成立问题

例7 (1) 函数$f(x)=x^2+2x$, 若$f(x)>a$在$[1, 3]$上恒成立, 求实数a的取值范围;

(2) 函数$f(x)=x^2+2x$, 若$f(x)>a$在$[1, 3]$上有解, 求实数a的取值范围.

这7组题讨论完了之后, 有两道课堂练习.

最后, L老师进行小结, 突出了"学数学, 有时要咬文嚼字"的观点.

这节课, 首先好在教师从学生实际产生的错误中收集材料. 能够理出这7组似是而非的题, 说明L老师不仅用心, 而且有较强的归纳能力, 功夫不一般. 因为针对性很强, 因此教学效果好. 其次, 这节课构思非常精妙, 充分运用了对比的手法, 重点突出, 简洁明了, 让人印象深刻. 第三, 凸现了学习数学的一个重要经验, 那就是L老师最后总结的"学数学, 有时要咬文嚼字".

笔者曾经写过一本名为《数学教学中的语言问题》的书, 就是在前辈数学教育家赵宪初先生的"学数学, 有时要咬文嚼字"的观点启发下写的. 因为数学很严谨, 反映在表述上, 用词常常差不得半点. 数学中的语言问题, 是学生学数学的难点之一, 但常常被老师忽视. 我们应该有计划地讲解一些和数学相关的词语, 同时也要抓住一切可以利用的机会解释和数学相关的词语. 这节课就是抓住机会解释和数学相关的词语, 体现了赵老的"学数学, 有时要咬文嚼字"的精神, 所以是很有价值的.

但是, 如果能够把"学数学, 有时要咬文嚼字"的观点进一步具体化, 可能效果会更好.

譬如, 从这7组题中反映出来的, 学数学要"搞清对象". 例1第(2)小题的对象是数的集合, 而第(3)小题的对象是点的集合. 第(1)小题和第(2)小题里的集合N, 一个是值域, 一个则是定义域. 例6的第(1)小题研究的对象是一个函数, 它是个"自对称"图形, 而第(2)小题研究的是两个函数"互对称"问题.

譬如, 学数学还要"注意顺序". 我们知道, 短语"两数和的平方"与"两数平方的和", 只是字的顺序不同, 但意义完全不一样. 同样地, 式子$\sin x^2$和$\sin^2 x$, 反映的运算顺序也是不一样的. 在这7组例子中, 例5涉及了顺序. 例5(1)要先求出反函数$f^{-1}(x)$, 然后再用$x-1$代替x, 求得$f^{-1}(x-1)$; 而例5(2)要先用$x-1$代替x, 得$f(x-1)$, 然后再求其反函数.

学数学还要"区分是否确定". 譬如例3的变式里, 函数的定义域$(-\infty,1]$是函数本身确定的, 在这个范围之外, 函数没有意义; 而函数"在$(-\infty,1]$上有意义", 不等于说在其他地方函数就没有意义了. 同样的, 例3 $f(x)=x^2+4ax+6$的对称轴是$x=-2a$, 它的递增区间是$[-2a,+\infty)$, 因此对第(1)小题来说, 应有$-2a=2$, 得$a=-1$. 但是对第(2)小题来说, 只要$-2a\leqslant 2$即可, 于是解得$a\geqslant -1$. 递增区间是函数本身确定的, 但在某个区间上是增函数, 这个区间不确定的, 它是递增区间的一部分.

语文课里有辨析词义, 区分近义词、反义词的作业, "搞清对象"、"注意顺序"、"区分是否确定"可能是具有数学特色的三类词义辨析问题. 当然, 除此之外肯定还有其他的具有数学特色的词义辨析问题, 笔者在这里只是抛砖引玉.

从一个解题错误引发的问题探究

100075 北京市丰台区东铁营一中 荣 幸

1. 问题的提出

2012年4月笔者在参加丰台一模的阅卷过程中, 发现有个学生在计算坐标y_P和y_Q时算错了, 但是后面的所有式子都和答案一样. 这个问题引起了笔者的思考, 为什么前面算错了后面还会得出正确的结果, 是巧合吗? 笔者仔细推算后发现果然不是巧合, 原来这道题的结论是可以推广的, 学生正好错有错着.

2. 问题的分析和解决

原题如下: 已知椭圆C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 且经过点$M(-2,0)$. (I)求椭圆C的标准方程; (II)设直线l: $y=kx+m$与椭圆C相交于$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$两点, 连结MA、MB并延长交直线$x=4$于P、Q两点, 设y_P、y_Q分别为点P、Q的纵坐标, 且$\dfrac{1}{y_1}+\dfrac{1}{y_2}=\dfrac{1}{y_P}+\dfrac{1}{y_Q}$. 求证: 直线$l$过定点.

学生错将点$M(-2,0)$当作原点$O(0,0)$来计算, 坐标y_P和y_Q当然就会算错, 那后面的过程为什么对呢?

猜想1 若点M为x轴上任一定点$(s,0)$, 则直线l都过同一定点.

下面证明第(II)小题: 由$\begin{cases}x^2+2y^2=4,\\ y=kx+m,\end{cases}$ 消去y得$(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-4=0$, 且$\Delta>0$. 因为$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$, 所以$x_1+x_2=-\dfrac{4km}{2k^2+1}$, $x_1x_2=\dfrac{2m^2-4}{2k^2+1}$. (步骤1)设直线$MA$: $y=\dfrac{y_1}{x_1-s}(x-s)$, 因为$x=4$, 所以$y_P=\dfrac{(4-s)y_1}{x_1-s}$. 同理$y_Q=\dfrac{(4-s)y_2}{x_2-s}$. 因为$\dfrac{1}{y_1}+\dfrac{1}{y_2}=\dfrac{1}{y_P}+\dfrac{1}{y_Q}$, 所以$\dfrac{1}{y_1}+\dfrac{1}{y_2}=\dfrac{x_1-s}{(4-s)y_1}+\dfrac{x_2-s}{(4-s)y_2}$, 即$\dfrac{x_1-4}{(4-s)y_1}+\dfrac{x_2-4}{(4-s)y_2}=0$, 所以$(x_1-4)y_2+(x_2-4)y_1=0$ (此处往下与原答案都一致), 所以$(x_1-4)\cdot(kx_2+m)+(x_2-4)(kx_1+m)=0$, $2kx_1x_2+m(x_1+x_2)-4k(x_1+x_2)-8m=0$, $2k\dfrac{2m^2-4}{2k^2+1}+m\left(-\dfrac{4km}{2k^2+1}\right)-4k\left(-\dfrac{4km}{2k^2+1}\right)-8m=0$, 所以$\dfrac{-8k-8m}{2k^2+1}=0$, 得$m=-k$. 则$y=kx-k=k(x-1)$, 故$l$过定点$(1,0)$. 因此猜想1确实是成立的, 点$M$可以在$x$轴上任意取, 所以学生的错解就可以解释了, 他把点M当成原点也能得出结果, 当然他的思路错了不能给分, 可他贡献给我们一个猜想. 由此笔者又想$x=4$这条直线是否也能移动呢?

猜想2 若点$M(s,0)$, 连结MA、MB并延长交直线$x=t$于P、Q两点, 设y_P、y_Q分别为点P、Q的纵坐标, 且$\dfrac{1}{y_1}+\dfrac{1}{y_2}=\dfrac{1}{y_P}+\dfrac{1}{y_Q}$, 则直线$l$仍过一定点.

下面从步骤1起证明: 设直线MA: $y=\dfrac{y_1}{x_1-s}(x-s)$, 因为$x=t$, 所以$y_P=\dfrac{(t-s)y_1}{x_1-s}$. 同理$y_Q=\dfrac{(t-s)y_2}{x_2-s}$. 因为$\dfrac{1}{y_1}+\dfrac{1}{y_2}=\dfrac{1}{y_P}+\dfrac{1}{y_Q}$, 所以$\dfrac{1}{y_1}+\dfrac{1}{y_2}=\dfrac{x_1-s}{(t-s)y_1}+\dfrac{x_2-s}{(t-s)y_2}$, 即$\dfrac{x_1-t}{(t-s)y_1}+\dfrac{x_2-t}{(t-s)y_2}=0$, 所以$(x_1-t)y_2+(x_2-t)y_1=0$, 所以$(x_1-t)(kx_2+m)+(x_2-t)(kx_1+m)=0$,

$$2kx_1x_2+(m-tk)(x_1+x_2)-2tm=0, \quad (*)$$

$$2k\frac{2m^2-4}{2k^2+1}+(m-tk)\Big(-\frac{4km}{2k^2+1}\Big)-2tm$$

$=0$, 所以 $\dfrac{4k+tm}{2k^2+1}=0$, 得 $m=-\dfrac{4k}{t}$.

则 $y=kx-\dfrac{4k}{t}=k\Big(x-\dfrac{4}{t}\Big)$, 故直线 l 过定点 $\Big(\dfrac{4}{t},0\Big)$. 在计算过程中发现应将猜想2补充条件"$t\neq s$ 且 $t\neq 0$". 在得出这个结论后, 自然而然猜想: 若椭圆的方程改变, 应该不影响结论的成立. 于是有

猜想3 设直线 l: $y=kx+m$ 与椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 相交于 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 两点, $M(s,0)$. 连结 MA、MB 并延长交直线 $x=t\,(t\in\mathbf{R}$ 且 $t\neq s$, $t\neq 0)$ 于 P、Q 两点. 设 y_P、y_Q 分别为点 P、Q 的纵坐标, 且 $\dfrac{1}{y_1}+\dfrac{1}{y_2}=\dfrac{1}{y_P}+\dfrac{1}{y_Q}$. 则直线 l 过一定点.

证明: 为了计算简便, 不妨设 $\dfrac{1}{a^2}=p$, $\dfrac{1}{b^2}=q$, 则 $\begin{cases}px^2+qy^2=1,\\ y=kx+m.\end{cases}$ 消去 y 得 $(qk^2+p)x^2+2qkmx+qm^2-1=0$, $\Delta=4q^2k^2m^2-4(qk^2+p)(qm^2-1)>0$, 即 $m^2<\dfrac{k^2}{p}+\dfrac{1}{q}=a^2k^2+b^2$. $x_1+x_2=-\dfrac{2qkm}{qk^2+p}$, $x_1x_2=\dfrac{qm^2-1}{qk^2+p}$. 下面过程省略与猜想2证明相同部分, 直接将 x_1+x_2 与 x_1x_2 代入 (*) 式得

$$2k\frac{qm^2-1}{qk^2+p}+(m-tk)\Big(-\frac{2qkm}{qk^2+p}\Big)-2tm=0,$$

整理得 $k+tpm=0$, 所以 $m=-\dfrac{k}{tp}$. 故直线 l: $y=kx-\dfrac{k}{tp}=k\Big(x-\dfrac{1}{tp}\Big)=k\Big(x-\dfrac{a^2}{t}\Big)$ 恒过点 $\Big(\dfrac{a^2}{t},0\Big)$.

至此本题结论已经推广到一般情形, 即: 设直线 l: $y=kx+m$ 与椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 相交于 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 两点, 有定点 $M(s,0)(s\in\mathbf{R})$. 连结 MA、MB 并延长交直线 $x=t(t\in\mathbf{R}$ 且 $t\neq s$, $t\neq 0)$ 于 P、Q 两点, 设 y_P、y_Q 分别为点 P、Q 的纵坐标, 且 $\dfrac{1}{y_1}+\dfrac{1}{y_2}=\dfrac{1}{y_P}+\dfrac{1}{y_Q}$. 则直线 l 恒过一定点 $\Big(\dfrac{a^2}{t},0\Big)$.

3. 问题反思

笔者对此次在批卷中深入思考学生错误的原因并找到根源, 很有感触. 当把这种感悟在试卷评讲时与学生交流发现他们也拓宽了思路. 挖掘学生错误的价值其效果不亚于正确解法, 甚至效果还更好.

好处1: 错误是迈向成功的动力. "失败乃成功之母", 科学家钱学森说过这样的话:"正确的结果是从大量的错误中得出来的, 没有大量的错误做台阶, 也就登不上最后正确结果的高峰." 当学生做错的时候, 让其审视自己的错误, 他会问自己"我为什么错呢?"这种自省就是其解决困难而获得成功的最大动力. 笔者得出推广结论的思考过程其实是给学生的一个示范, 为什么把点 $M(-2,0)$ 当成原点, 在点 P、Q 坐标算错的情况下结论还对了呢? 是否点 M 可取 x 轴上任意一点呢? 是否 $x=4$ 可以换成其他垂直于 x 轴的定直线呢? 是否椭圆方程可以换成其他以坐标轴为对称轴的椭圆标准方程呢? 在问自己为什么的过程中就给了自己思考并解决的动力.

好处2: 通过错误能培养学生更缜密的思维. 当错误经过放大而强化印象后, 通常能避免出现类似错误, 从而提高学生思维的缜密性、培养更好的学习习惯. 相信老师们教学过程中能找到很多印证的例子.

好处3: 错误也有其价值, 真理和谬误往往是一步之遥, 错误并不一定全是错误结论. 恩格斯曾指出: "今天被认为是合乎真理的认识都有它隐蔽的、以后会显露出来的错误的方面; 同样, 今天已经被认为是错误的认识也有它真理的方面, 因而它从前才能被认为是合理的."

希望我们每一位教育工作者在教学过程中都正确看待学生的错误, 充分发挥错误的价值, 抓住错误的闪光点!

参考文献

[1] 黄超. 透析错误根源审思复习理念——2009年高考数学浙江卷文科第20题阅卷启示[J]. 中学数学教育, 2010(10): 34.

[2] 金月波. 2010年海南省高考数学阅卷之一窥[J]. 数学通报, 2011(9): 8.

[3] 庞平飞. 重试卷分析展数学魅力——对2010年上海市中考数学第23题的分析[J]. 中学教学参考, 2011(4): 28.

一道2002年复旦自主招生试题的背景探究和拓展

430079 华中师范大学国家数字化学习工程技术研究中心 彭翕成
517139 广东省河源市连平县忠信中学 严文兰

2002年复旦大学自主招生有这样一道题:

证明方程$x^3-2y^3=1$的任一组整数解$(x,y)\,(y\neq 0)$都满足$\left|\frac{x}{y}-\sqrt[3]{2}\right|<\frac{4}{|y^3|}$.

证明: $1=x^3-2y^3=(x-\sqrt[3]{2}y)(x^2+\sqrt[3]{2}xy+\sqrt[3]{4}y^2)$, 由$x^2+\sqrt[3]{2}xy+\sqrt[3]{4}y^2>x^2+\sqrt[3]{2}xy+\frac{1}{4}(\sqrt[3]{2}y)^2=\left(x+\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}y\right)^2>0$得$x-\sqrt[3]{2}y>0$, 下面证明$x^2+\sqrt[3]{2}xy+\sqrt[3]{4}y^2>\frac{y^2}{4}$. 此式可化为$\left(\frac{x}{y}\right)^2+\frac{\sqrt[3]{2}x}{y}+\sqrt[3]{4}-\frac{1}{4}>0$, 因为$\Delta=(\sqrt[3]{2})^2-4\sqrt[3]{4}+1\approx-3.76<0$, 所以$x^2+\sqrt[3]{2}xy+\sqrt[3]{4}y^2>\frac{y^2}{4}$, 得证.

$1=x^3-2y^3=(x-\sqrt[3]{2}y)(x^2+\sqrt[3]{2}xy+\sqrt[3]{4}y^2)>\frac{y^2}{4}(x-\sqrt[3]{2}y)$, 即$\left|\frac{x}{y}-\sqrt[3]{2}\right|<\frac{4}{|y^3|}$.

能否缩小不等式$\left|\frac{x}{y}-\sqrt[3]{2}\right|<\frac{4}{|y^3|}$中的系数4呢?

拓展1: 证明方程$x^3-2y^3=1$的任一组整数解$(x,y)(y\neq 0)$都满足$\left|\frac{x}{y}-\sqrt[3]{2}\right|<\frac{1}{|y^3|}$.

证明: 仿照上文, $1=x^3-2y^3=(x-\sqrt[3]{2}y)(x^2+\sqrt[3]{2}xy+\sqrt[3]{4}y^2)$, 由$x^2+\sqrt[3]{2}xy+\sqrt[3]{4}y^2>x^2+\sqrt[3]{2}xy+\frac{1}{4}(\sqrt[3]{2}y)^2=\left(x+\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}y\right)^2>0$得$x-\sqrt[3]{2}y>0$. 下面证$x^2+\sqrt[3]{2}xy+\sqrt[3]{4}y^2>y^2$, 即证$\left(\frac{x}{y}\right)^2+\frac{\sqrt[3]{2}x}{y}+\sqrt[3]{4}-1>0$. $\Delta=(\sqrt[3]{2})^2-4\sqrt[3]{4}+4\approx-0.76<0$, 所以$x^2+\sqrt[3]{2}xy+\sqrt[3]{4}y^2>y^2$得证. $1=x^3-2y^3=(x-\sqrt[3]{2}y)(x^2+\sqrt[3]{2}xy+\sqrt[3]{4}y^2)>y^2(x-\sqrt[3]{2}y)$, 所以$\left|\frac{x}{y}-\sqrt[3]{2}\right|<\frac{1}{|y^3|}$.

此题背景是丢番图方程, 通过查阅相关资料, 可以得到更多信息.

在曹珍富先生的《丢番图方程引论》(1989年哈尔滨工业大学出版社出版)的第105页, 有如下例题: 设$d>1$是一个给定的整数, 则丢番图方程$x^3+dy^3=1\,(xy\neq 0)$最多有一组整数解(此题证明需要用到复杂的p-adic方法, 而且证明过程长达3个页面, 本文略去).

$x^3+dy^3=1$等价于$x^3-d(-y)^3=1$, 方程$x^3-2y^3=1$属于此类. 若$xy\neq 0$, 最多有一组整数解, 即$(-1,-1)$. 也就是说所谓的"任一组"整数解$(x,y)(y\neq 0)$, 给人感觉好像方程有很多组解, 其实只有唯一解$(-1,-1)$. 知道了题目背景, 在研究时就掌握了制高点, 由$\left|\frac{x}{y}-\sqrt[3]{2}\right|=|1-\sqrt[3]{2}|<0.26<\frac{1}{3}=\frac{1}{3|y|^3}$, 可得拓展2.

拓展2: 证明方程$x^3-2y^3=1$的任一组整数解$(x,y)(y\neq 0)$都满足$\left|\frac{x}{y}-\sqrt[3]{2}\right|<\frac{1}{3|y|^3}$.

证明: 当$|x|\leqslant 4$时, 注意到x只能为奇数, 检验易知只有解$x=-1$, $y=-1$, 计算$\left|\frac{x}{y}-\sqrt[3]{2}\right|=|1-\sqrt[3]{2}|<0.26<\frac{1}{3}=\frac{1}{3|y|^3}$.

当$|x|>4$时, 由$x^3-2y^3=1$知x、y同号, 此时易证$|x|^3>|y|^3$, $|x|>|y|$, 所以

$$1=(x-\sqrt[3]{2}y)(x^2+x\cdot\sqrt[3]{2}y+\sqrt[3]{4}y^2),$$

$$\left|\frac{x}{y}-\sqrt[3]{2}\right|=\frac{1}{|y|(x^2+x\cdot\sqrt[3]{2}y+\sqrt[3]{4}y^2)}<\frac{1}{|y|(y^2+y\cdot\sqrt[3]{2}y+\sqrt[3]{4}y^2)}<\frac{1}{3|y|^3},$$

即$\left|\frac{x}{y}-\sqrt[3]{2}\right|<\frac{1}{3|y|^3}$.

由此可见, 命题人根据丢番图方程的背景来命题, 显得游刃有余. 而出的题要存在

(下转第10-47页)

由一个趣味数学问题说起

200241 华东师大数学系2008级本科生 褚婧媛 苏画画

问题: 设在一边长为 3 m 的正方形的四个顶点上各有一只会思考的小蚂蚁 (分别标记为 A, B, C, D 号), 它们约定按如下的方向爬行: $A\to B$, $B\to C$, $C\to D$, $D\to A$. 若四只小蚂蚁都以 1cm/s 的速度匀速爬行, 问: 经过多少时间它们会相遇?

这个有趣的问题曾出现在一些趣味数学书籍里. 乍一看, 此题不简单.下面是美国科普大师马丁·加德纳的解答.

如图 1, 注意到相邻的两只蚂蚁中, 后面的蚂蚁总是朝着前面的蚂蚁, 且保持着直角在移动, 于是它们依然在一更小的正方形的四个顶点上. 于是可设想: 前面的蚂蚁停于正方形的一角, 而后面的蚂蚁沿着正方形的一边爬行. 此蕴含着: 当他们在正方形的中心相遇时刻, 各自爬行的路程正好是正方形的边长3m, 所以需要 300 秒即 5 分钟.

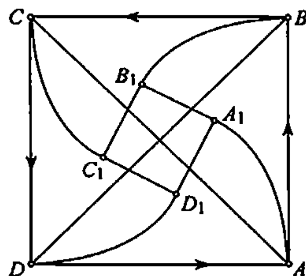


图 1

这样的回答是否让你感到几分惊奇? 或许好学的你并不满足于此, 若借助高观点下初等数学的视野, 我们可以知道的更多. 请看下面的数学之旅.

1. 数学之问

在一边长为 s 米的正方形的四个顶点上各有一只会思考的小蚂蚁, 它们约定按如下的方向爬行: $A\to B$, $B\to C$, $C\to D$, $D\to A$. 若它们都以 v 米/秒的速度匀速爬行, 问其各自的追逐曲线是怎样的?

分析与解: 由于各只蚂蚁的位置和相关状态都是对等的. 我们不妨只关注其中的一只, 比如 A.

如图 2, 以正方形的中心 O 为原点, OA 所在的直线为 x 轴建立平面直角坐标系, 记 A 蚂蚁追逐曲线中的动点 A_1 的坐标为 (x_1,y_1), 与其相应的极坐标 (r,θ), 则 $x_1=r\cos\theta, y_1=r\sin\theta$. 易知 B 蚂蚁追逐曲线中相应的动点 B_1 的极坐标为 $\left(r,\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$, 于是动点 B_1 的坐标为 $(x_2,y_2)=\left(r\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right),r\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$.

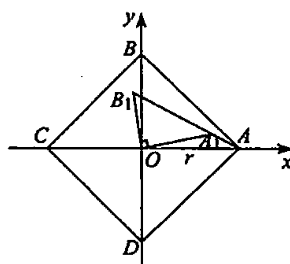


图 2

由已知 (注意到 A 蚂蚁总是追逐 B) 得蚂蚁 A 在点 A_1 处的方向

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{r\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)-r\sin\theta}{r\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)-r\cos\theta}=-\cot\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right),$$

由直角坐标系与极坐标的关系有

$$\begin{cases}dx=\cos\theta dr-r\sin\theta d\theta,\\ dy=\sin\theta dr+r\cos\theta d\theta,\end{cases}$$

进而有

$$\frac{dr}{d\theta}=-r,$$

解此常微分方程, 我们得到通解

$$r(\theta)=ce^{-\theta}.$$

再将蚂蚁A的初始位置点代入，此时$r_0=\frac{\sqrt{2}}{2}s$，$\theta_0=0$，代入上式可得到$c=\frac{\sqrt{2}}{2}s$．于是我们知蚂蚁A的追逐曲线是

$$r(\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}s\cdot e^{-\theta},$$

这是一条对数螺线．

注：其他蚂蚁的追逐曲线本质上和蚂蚁A相同．

2．问题的延伸

上述的问题和相关的解答激发我们的联想：若相似的数学故事发生在一个正多边形上，又会如何呢？这就是下面的问题．

在一边长为s米的正m边形的m个顶点上各有一只会思考的小蚂蚁，它们约定按如下的方向爬行：$1\to2$，$2\to3$，$3\to4$，……，$m\to1$．若它们都以v米/秒的速度匀速爬行，问其各自的追逐曲线是怎样的？

分析与解：设1，2，……，m号蚂蚁分别位于正m边形的m个顶点$K_1,K_2,\cdots,K_m$上，由此构建如下的微分方程模型如图3（这里我们以正五边形为图例），以正多边形的中心O为原点，OK_1所在的直线为横轴建立相应的直角坐标系．由对称性，只关注1号蚂蚁和2号蚂蚁．记1号蚂蚁和2号蚂蚁追逐曲线中的动点的坐标分别为(x_1,y_1)、(x_2,y_2)，则1号蚂蚁的动点坐标：$(x_1,y_1)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$，2号蚂蚁的动点坐标：$(x_2,y_2)=\left(r\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{m}\right),r\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{m}\right)\right)$．

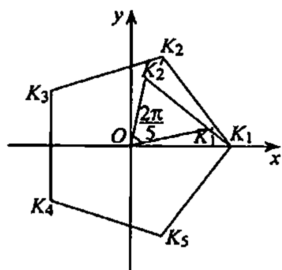


图3

于是有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{r\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{m}\right)-r\sin\theta}{r\cos(\theta+\frac{2\pi}{m})-r\cos\theta}=-\cot\left(\theta+\frac{\pi}{m}\right),$$

由直角坐标系与极坐标的关系，可得到

$$\frac{dr}{d\theta}=-r\tan\frac{\pi}{m},$$

再结合初始时刻的信息，解此常微分方程可知

$$r=\frac{s}{2\sin\frac{\pi}{m}}e^{-\theta\tan\frac{\pi}{m}}.$$

注：在数学上，极坐标方程形如$r=ce^{d\theta}$（其中c、d为常数）的曲线叫做对数螺线．对数螺线有着许多奇妙的性质，比如它具有奇妙的自相似性：其上的任意小的部分经过数学的相似变换和某一大的部分相似．难怪有许多数学家为之着迷，瑞士数学家雅各·伯努利（1654–1705年）是其中的一位，因为惊叹这种曲线的神奇（他本人在对数螺线的研究上有着出色的贡献），在遗嘱里让后人将对数螺线刻在自己的墓碑上，并附以颂词“Eadem mutata resurgo”（纵然变化，依然故我）．只是由于雕刻师的无知，误将冯京当马凉，于是有阿基米德螺线在雅各·伯努利的墓碑上长眠（阿基米德螺线的极坐标方程为$r(\theta)=a+b\theta$，其中a、b是常数）．



上述问题当中出现的曲线$r(\theta)=\frac{s}{2\sin\frac{\pi}{m}}e^{-\theta\tan\frac{\pi}{m}}$就是一种特殊的对数螺线．图4呈现的是$m=3,4,5,6,7,8$情形下的这一对数螺线间的追逐．

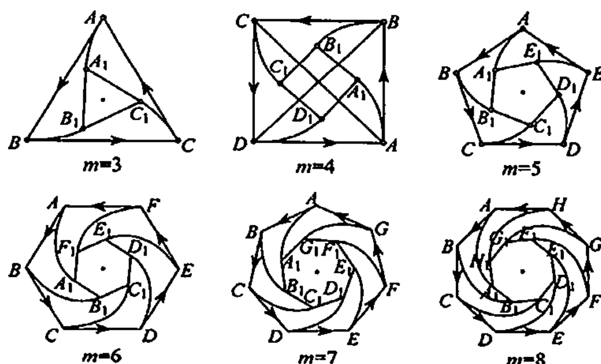


图4

变化中寻不变　探究中求推广

724300　陕西省略阳县天津高级中学　陈　波

2011年北京大学自主招生考试试题中有这样一道题:

题目　已知 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)、(x_3,y_3) 是圆 $x^2+y^2=1$ 上的三点, 且满足 $x_1+x_2+x_3=0$, $y_1+y_2+y_3=0$. 证明: $x_1^2+x_2^2+x_3^2=y_1^2+y_2^2+y_3^2=\frac{3}{2}$.

文 [1] 通过转化思想将本题转化为三角等式的证明、复数形式的运算, 从而给出了此题的三种妙解. 文 [2] 对此题又作了深入探索, 得到了重心在原点的椭圆 (或圆) 内接三角形的几个重要性质. 但笔者发现, 若从几何变换的角度看, 此题会有另一流畅自然的解法, 并且更能顺其自然地得到文 [2] 所提到的性质.

1. 从中心旋转变换的角度证明原题

如图1所示, 设点 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$、$P_3(x_3,y_3)$. 于是 $\overrightarrow{OP_1}=(x_1,y_1)$, $\overrightarrow{OP_2}=(x_2,y_2)$, $\overrightarrow{OP_3}=(x_3,y_3)$.

由 $\left|\overrightarrow{OP_1}\right|=\left|\overrightarrow{OP_2}\right|=\left|\overrightarrow{OP_3}\right|=1$, 得点 O 是 $\triangle P_1P_2P_3$ 的外心; 由 $\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}=\overrightarrow{0}$, 得点 O 也是 $\triangle P_1P_2P_3$ 的重心, 所以 $\triangle P_1P_2P_3$ 是正三角形.

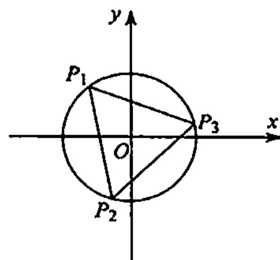


图1

正是因为 $\triangle P_1P_2P_3$ 是圆 $x^2+y^2=1$ 的内接正三角形, 所以无论点 P_1、P_2、P_3 在圆 $x^2+y^2=1$ 上如何运动, 可以认为以点 O 为旋

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

3. 大自然的几何

若有人告诉你, 这一奇妙的曲线其实在自然界中早已神秘地存在有千万年了, 你是否会觉得惊奇? 有着海洋"活化石"美誉的鹦鹉螺, 隐藏着大自然数千万年演变的秘密, 呈现在其贝壳上的几何顺序, 竟是优美的对数螺线. 奇妙的是,贝壳新增出来的每一部位,都会按照原先已有的对数螺旋结构增生,从不会改变, 鹦鹉螺以其独特的美丽演绎着大自然的数学之美.

这一奇妙的曲线在大自然中无所不在. 当你以一分数学的心情来阅读身边的世界, 你会发现蜗牛的螺旋线里也有这样的几何之美, 智慧的蜘蛛依照这种曲线的法则来绕它网上的螺线; 鹰以这一曲线的方式接近它们的猎物; 在雏菊花蕊和向日葵的种子排列中也隐藏着这一曲线的美……



鹦鹉螺

图5

在你仰望星空的时刻, 你依然可以想象, 这一曲线印刻在无限辽阔的宇宙中, 也印在你我的心扉. 回眸处,你是否会为此心动: 两千多年前, 柏拉图曾在雅典帕特农神庙旁如是说, "God eternally geometrizes" (上帝是一位几何学家).
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

转中心, 以 $\frac{2\pi}{3}$ 为旋转角将点 P_1 进行旋转变换得到点 P_2, 同理可由点 P_2 得到点 P_3, 点 P_3 得到点 P_1.

于是, 由旋转变换公式有:

$$\begin{cases} x_1 = x_3\cos\frac{2\pi}{3} - y_3\sin\frac{2\pi}{3} \\ \quad = -\frac{1}{2}x_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}y_3, \\ y_1 = x_3\sin\frac{2\pi}{3} + y_3\cos\frac{2\pi}{3} \\ \quad = \frac{\sqrt{3}}{2}x_3 - \frac{1}{2}y_3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_3\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) - y_3\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \\ \quad = -\frac{1}{2}x_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_3, \\ y_2 = x_3\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + y_3\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \\ \quad = -\frac{\sqrt{3}}{2}x_3 - \frac{1}{2}y_3, \end{cases}$$

所以 $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = \left(-\frac{1}{2}x_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}y_3\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}x_3+\frac{\sqrt{3}}{2}y_3\right)^2 + x_3^2 = \frac{3}{2}x_3^2+\frac{3}{2}y_3^2 = \frac{3}{2}$,

$y_1^2+y_2^2+y_3^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_3 - \frac{1}{2}y_3\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x_3-\frac{1}{2}y_3\right)^2 + y_3^2 = \frac{3}{2}x_3^2+\frac{3}{2}y_3^2 = \frac{3}{2}$.

2. 从仿射变换的角度看文 [2] 所提到的性质

文 [2] 得出了重心在原点的椭圆 (或圆) 内接三角形的如下三个性质:

性质1　若 $A_i(x_i, y_i)(i = 1、2、3)$ 是椭圆 (或圆): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1\,(a>0, b>0)$ 上的三个不同点, 点 A_i 的离心角为 θ_i, 且 $\triangle A_1A_2A_3$ 的重心是原点, 则 $\cos(\theta_i-\theta_j) = -\frac{1}{2}$ $(i、j \in \{1,2,3\}, i\neq j)$.

性质2　若 $A_i(x_i, y_i)(i=1、2、3)$ 是椭圆 (或圆): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1(a>0, b>0)$ 上的三个不同点, 且 $\triangle A_1A_2A_3$ 的重心是原点, 则 $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = \frac{3}{2}a^2$, $y_1^2+y_2^2+y_3^2 = \frac{3}{2}b^2$.

性质3　若 $A_i\,(x_i, y_i)(i=1、2、3)$ 是椭圆 (或圆): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1\,(a>0, b>0)$ 上的三个不同点, 且 $\triangle A_1A_2A_3$ 的重心是原点, 则 $S_{\triangle A_1A_2A_3} = \frac{3\sqrt{3}}{4}ab$.

若从仿射变换的角度看这三个性质, 其证明会更简洁.

对于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1\,(a>b>0)$, 令 $x' = \frac{x}{a}$, $y' = \frac{y}{b}$ 得圆 $x'^2+y'^2 = 1$. 同时, 椭圆上三点 $A_1(x_1, y_1)$、$A_2(x_2, y_2)$、$A_3(x_3, y_3)$ 分别对应圆上三点 $P_1'(x_1', y_1')$、$P_2'(x_2', y_2')$、$P_3'(x_3', y_3')$.

因为 $x_1+x_2+x_3 = 0 \Longleftrightarrow x_1'+x_2'+x_3' = 0$,

$y_1+y_2+y_3 = 0 \Longleftrightarrow y_1'+y_2'+y_3' = 0$,

所以 $\triangle A_1A_2A_3$ 的重心是原点, 则 $\triangle P_1'P_2'P_3'$ 的重心也是原点. 反之亦然.

另外, 对于圆 $x'^2+y'^2 = 1$ 上三点 $P_1'(x_1', y_1')$、$P_2'(x_2', y_2')$、$P_3'(x_3', y_3')$, 无论怎样运动, 只要注意到运动下的不变性, 即 $\triangle P_1'P_2'P_3'$ 是正三角形, 就能得到一些意料之外而又在情理之中的收获.

因此, 对于圆 $x'^2+y'^2 = 1$ 上三点 $P_1'(x_1', y_1')$、$P_2'(x_2', y_2')$、$P_3'(x_3', y_3')$ 而言, 发现变化中的第一个不变:

$$x_1'x_2'+y_1'y_2' = x_2'x_3'+y_2'y_3' = x_1'x_3'+y_1'y_3' = -\frac{1}{2}.$$

由变换 $x' = \frac{x}{a}$, $y' = \frac{y}{b}$, 有

$$\frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2} = \frac{x_2x_3}{a^2}+\frac{y_2y_3}{b^2} = \frac{x_1x_3}{a^2}+\frac{y_1y_3}{b^2} = -\frac{1}{2}. \quad ①$$

若椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1\,(a>b>0)$ 上的点 A_i 的离心角为 θ_i, 则 $x_i = a\cos\theta_i$, $y_i = b\sin\theta_i$ $(i=1、2、3)$, 代入①式得

$$\cos(\theta_i-\theta_j) = -\frac{1}{2}(i、j\in\{1、2、3\}, i\neq j).$$

这就是性质1.

变化中的第二个不变:

由原题目的证明可知 $x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2 = y_1'^2+y_2'^2+y_3'^3 = \frac{3}{2}$.

由变换 $x' = \frac{x}{a}$, $y' = \frac{y}{b}$, 有 $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{x_3^2}{a^2} = \frac{y_1^2}{b^2}+\frac{y_2^2}{b^2}+\frac{y_3^2}{b^2} = \frac{3}{2}$.

即 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=\frac{3}{2}a^2$, $y_1^2+y_2^2+y_3^2=\frac{3}{2}b^2$. 这就是性质2.

变化中的第三个不变:

由于两个封闭图形面积之比是仿射不变量, 所以 $\frac{S_{\triangle P_1'P_2'P_3'}}{S_{\triangle A_1A_2A_3}}=\frac{1}{ab}$, 而圆 $x'^2+y'^2=1$ 中 $S_{\triangle P_1'P_2'P_3'}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$, 从而 $S_{\triangle A_1A_2A_3}=\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$. 这就是性质3.

最后, 还要说明的是这三个性质中如果图形是圆, 则 $a=b=r$.

至此, 可以发现无论是从中心旋转变换的角度对原题目求解, 还是从仿射变换的角度对文[2]所提出的三个性质简洁地证明, 都注重了"变化中寻求不变"这一规律. 于是, 对于原题目及文[2]所提出的三个性质还可以进一步地做如下推广.

3. 推广

推广1 若正多边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 的 n 个顶点 $P_i(x_i,y_i)$ $(i=1,2\cdots,n)$ 均在圆 $x^2+y^2=1$ 上, 则 $\sum\limits_{i=1}^n x_i^2=\sum\limits_{i=1}^n y_i^2=\frac{n}{2}$.

证明: 由于多边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 是圆 $x^2+y^2=1$ 的内接正多边形, 所以圆 $x^2+y^2=1$ 上的 n 个点 $P_i(x_i,y_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 可看作是: 把点 P_i 以原点 O 为旋转中心, 以 $\frac{2\pi}{n}$ 为旋转角进行旋转变换得到点 P_{i+1} $(i=1,2,\cdots,n)$. 其中, 点 P_{n+1} 与点 P_1 重合.

由旋转变换公式有:

$$\begin{cases} x_{i+1}=x_i\cos\frac{2\pi}{n}-y_i\sin\frac{2\pi}{n}, \\ y_{i+1}=x_i\sin\frac{2\pi}{n}+y_i\cos\frac{2\pi}{n} \end{cases}$$

$(i=1,2,\cdots,n,\ x_{n+1}=x_1,\ y_{n+1}=y_1)$,

所以得 $\sum\limits_{i=1}^n x_i^2=\sum\limits_{i=1}^n\left(x_i\cos\frac{2\pi}{n}-y_i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^2$

$$=\cos^2\frac{2\pi}{n}\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)+\sin^2\frac{2\pi}{n}\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)-2\sin\frac{2\pi}{n}\cos\frac{2\pi}{n}\left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right),$$

即

$$\sin\frac{2\pi}{n}\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)-\sin\frac{2\pi}{n}\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)=-2\cos\frac{2\pi}{n}\left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right).\cdots\cdots②$$

又因为 $x_{i+1}y_{i+1}=\left(x_i\cos\frac{2\pi}{n}-y_i\sin\frac{2\pi}{n}\right)\cdot\left(x_i\sin\frac{2\pi}{n}+y_i\cos\frac{2\pi}{n}\right)$

$$=x_i^2\sin\frac{2\pi}{n}\cos\frac{2\pi}{n}-y_i^2\sin\frac{2\pi}{n}\cos\frac{2\pi}{n}+x_iy_i\left(\cos^2\frac{2\pi}{n}-\sin^2\frac{2\pi}{n}\right)$$

$(i=1,2,\cdots,n)$,

将以上 n 个式子相加, 整理化简得

$$\cos\frac{2\pi}{n}\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)-\cos\frac{2\pi}{n}\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)=2\sin\frac{2\pi}{n}\left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right).\cdots\cdots③$$

结合式②、③可推出 $\sum\limits_{i=1}^n x_i^2=\sum\limits_{i=1}^n y_i^2$.

又因为 $\sum\limits_{i=1}^n x_i^2+\sum\limits_{i=1}^n y_i^2=\sum\limits_{i=1}^n(x_i^2+y_i^2)=n$, 所以 $\sum\limits_{i=1}^n x_i^2=\sum\limits_{i=1}^n y_i^2=\frac{n}{2}$.

由椭圆变到圆所作的仿射变换 $x'=\frac{x}{a}$, $y'=\frac{y}{b}$ 实际上是一类特殊的仿射变换, 也即伸缩变换, 而 n 边形的重心经过伸缩变换后仍为 n 边形的重心, 同时结合推广1就不难对文[2]中的三个性质作如下推广:

推广2 若 $A_i(x_i,y_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 是椭圆(或圆): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$ 上的 n 个不同点, 点 A_i 的离心角为 θ_i, 且 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的重心是原点, 则 $\cos(\theta_i-\theta_j)=\cos\frac{2\pi}{n}$ $(i、j\in\{1,2,\cdots,n\},i\neq j)$.

推广3 若 $A_i(x_i,y_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 是椭圆(或圆): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$ 上的 n 个不同点, 且 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的重心是原点, 则 $\sum\limits_{i=1}^n x_i^2=\frac{n}{2}a^2$, $\sum\limits_{i=1}^n y_i^2=\frac{n}{2}b^2$.

推广4 若 $A_i(x_i,y_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 是椭圆(或圆): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$ 上的 n 个

(下转第10-44页)

点关于直线对称点的简捷求法

830002 新疆生产建设兵团第二中学 张国治

如何求点$P(x_0,y_0)$关于直线$l:Ax+By+C=0\ (A^2+B^2\neq 0)$的对称点$Q(x_1,y_1)$？文[1]利用传统思路，即直线$l$是线段$PQ$的垂直平分线，解方程组得到

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{(B^2-A^2)x_0-2ABy_0-2AC}{A^2+B^2},\\ y_1=\dfrac{(A^2-B^2)y_0-2ABx_0-2BC}{A^2+B^2}.\end{cases}$$

其运算量很大，公式结构较难记忆．为此，文[2]将上述公式做了适当的改进，即：

$$\begin{cases}x_1=x_0-\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cdot 2d',\\ y_1=y_0-\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cdot 2d'\end{cases}$$

$\left(\text{其中}d'=\dfrac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$.

文[3]又给出一个公式：

$$\overrightarrow{PQ}=\begin{cases}2d\overrightarrow{v},Ax_0+By_0+C<0,\\ -2d\overrightarrow{v},Ax_0+By_0+C>0\end{cases}$$

(其中d表示点P到直线l的距离，$\overrightarrow{v}$为直线l的一个单位法向量).

不难发现，文[1]的公式推导较繁琐，且不容易记忆；文[2]公式是在文[1]的公式基础上推得的，有明显几何意义，且比较好记和运用；文[3]所提供的公式似乎非常简洁，极具几何意义，但其推导过程学生还是很难接受，况且还必须要判断点P在直线l所划分的某一区域内，这样一来，文[3]的公式不是很有优势了．针对上述问题，我们会思考，是否有一种简洁、直观、可行的推导方法呢？经笔者仔细研究，发现此问题的一种极具可操作性且简洁的求法．

解：设点$P(x_0,y_0)$关于直线$l:Ax+By+C=0(A^2+B^2\neq 0)$的对称点为$Q(x_1,y_1)$，设$\overrightarrow{n}$是直线$l$的一个法向量．如图1，过点$P$作$PN\perp l$，垂足为点$N$，则$\overrightarrow{n}/\!/\overrightarrow{PQ}$，即$\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{n}$（此时$\overrightarrow{PQ}$与$\overrightarrow{n}$的方向由$\lambda$来确定，无需单独判定，故关键是如何求出$\lambda$）．设点$M(x',y')$为直线$l$上任意一点，则$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{MP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{MP}+\frac{1}{2}\lambda\overrightarrow{n}$，而$\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{MN}$，所以$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{MP}+\frac{1}{2}\lambda|\overrightarrow{n}|^2=0$，得$\lambda=-\dfrac{2\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{MP}}{|\overrightarrow{n}|^2}$，所以

$$\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{n}=-\frac{2\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{MP}}{|\overrightarrow{n}|^2}\cdot\overrightarrow{n}.\cdots\cdots\cdots(*)$$

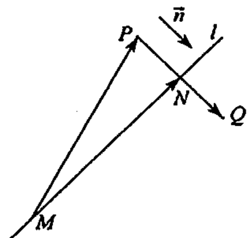


图1

若取$\overrightarrow{n}=(A,B)$，则$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{MP}=(A,B)\cdot(x_0-x',y_0-y')=Ax_0+By_0-(Ax'+By')$．而$Ax'+By'+C=0$，即$Ax'+By'=-C$，故$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{MP}=Ax_0+By_0+C$，由(*)得

$$\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{PQ}=\left(-\frac{2A(Ax_0+By_0+C)}{A^2+B^2},-\frac{2B(Ax_0+By_0+C)}{A^2+B^2}\right)$$

(其中O为坐标原点)，所以

$$\begin{aligned}(x_1,y_1)&=\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}\\&=\left(x_0-\frac{2A(Ax_0+By_0+C)}{A^2+B^2},\right.\\&\left.\quad y_0-\frac{2B(Ax_0+By_0+C)}{A^2+B^2}\right),\end{aligned}$$

$$故\begin{cases}x_1=x_0-\dfrac{2A(Ax_0+By_0+C)}{A^2+B^2},\\ y_1=y_0-\dfrac{2B(Ax_0+By_0+C)}{A^2+B^2}.\end{cases}\qquad(*')$$

点评:

(1) 上述证明的关键之一是设直线上一动点 $M(x',y')$, 体现了运动的观点; 关键二是充分应用法向量、向量的加法和数量积的运算, 体现向量的优越性和工具性.

(2) 按本文方法, 无需判定点的位置及法向量的方向.

(3) 若将 $(*)$ 变形为

$$\overrightarrow{PQ}=-\frac{2\vec{n}\cdot\overrightarrow{MP}}{|\vec{n}|^2}\cdot\vec{n}=-\frac{2\vec{n}\cdot\overrightarrow{MP}}{|\vec{n}|}\cdot\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=-\frac{2(Ax_0+By_0+C)}{\sqrt{A^2+B^2}}\Big(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\Big),$$

即为文 [2] 公式, 稍加变形不难得到

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ}&=-\frac{2\vec{n}\cdot\overrightarrow{MP}}{|\vec{n}|}\cdot\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\\&=\pm\frac{2|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}\vec{v}\\&=\begin{cases}2d\vec{v},Ax_0+By_0+C<0,\\-2d\vec{v},Ax_0+By_0+C>0,\end{cases}\end{aligned}$$

即为文 [3] 公式.

(4) 运用类比推理可将上述结论推广至空间立体几何:

点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 关于平面 α : $Ax+By+Cz+D=0\,(A^2+B^2+C^2\neq0)$ 的对称点为 $Q(x_1,y_1,z_1)$, 则 $\overrightarrow{PQ}=-\dfrac{2\vec{n}\cdot\overrightarrow{MP}}{|\vec{n}|^2}\cdot\vec{n}$ (其中 M 是平面上任一点, $\vec{n}$ 是平面 α 的一个法向量). 若取 $\vec{n}=(A,B,C)$, 则

$$x_1=x_0-\frac{2A(Ax_0+By_0+Cz_0+D)}{A^2+B^2+C^2},$$

$$y_1=y_0-\frac{2B(Ax_0+By_0+Cz_0+D)}{A^2+B^2+C^2},$$

$$z_1=z_0-\frac{2C(Ax_0+By_0+Cz_0+D)}{A^2+B^2+C^2}.$$

下面举例说明此公式的应用.

例 1　求点 $P(1,3)$ 关于直线 $l:2x-3y+2=0$ 的对称点 Q 的坐标.

解析: 设 $Q(x_1,y_1)$, 取直线 l 的一个法向量 $\vec{n}=(2,-3)$, 则由式 $(*')$ 可得:

$$\begin{cases}x_1=1-\dfrac{2\times2(2-9+2)}{2^2+(-3)^2}=\dfrac{33}{13},\\ y_1=3-\dfrac{2\times(-3)\times(2-9+2)}{2^2+(-3)^2}=\dfrac{9}{13}.\end{cases}$$

所以对称点 $Q\Big(\dfrac{33}{13},\dfrac{9}{13}\Big)$.

例 2　已知点 $P(x_0,y_0)$.

(1) 求点 P 关于直线 $l_1:x+y+c=0$ 的对称点的坐标;

(2) 求点 P 关于直线 $l_2:x-y+c=0$ 的对称点的坐标.

解析: (1) 设对称点为 $P_1(x_1,y_1)$, 取直线 l_1 的一个法向量 $\vec{n_1}=(1,1)$, 则由式 $(*')$ 可得:

$$\begin{cases}x_1=x_0-\dfrac{2(x_0+y_0+c)}{1^2+1^2}=-y_0-c,\\ y_1=y_0-\dfrac{2(x_0+y_0+c)}{1^2+1^2}=-x_0-c.\end{cases}$$

所以对称点为 $(-y_0-c,-x_0-c)$.

(2) 设对称点为 $P_2(x_2,y_2)$, 取直线 l_2 的一个法向量 $\vec{n_2}=(1,-1)$, 则由式 $(*')$ 可得:

$$\begin{cases}x_1=x_0-\dfrac{2(x_0-y_0+c)}{1^2+(-1)^2}=y_0-c,\\ y_1=y_0-\dfrac{-2(x_0-y_0+c)}{1^2+(-1)^2}=x_0+c.\end{cases}$$

所以对称点为 (y_0-c,x_0+c).

例 3　求曲线 $C:x^2+2xy+y^2+3x+y=0$ 关于直线 $l:2x-y-1=0$ 的对称曲线 C' 的方程.

解析: 设 $P(x,y)$ 为所求曲线 C' 上的任意一点, 则点 P 关于 l 的对称点 $Q(x_1,y_1)$ 必在曲线 C 上. 取直线 l 的一个法向量 $\vec{n}=(2,-1)$, 则由式 $(*')$ 可得:

$$\begin{cases}x_1=x-\dfrac{4(2x-y-1)}{2^2+(-1)^2}=\dfrac{-3x+4y+4}{5},\\ y_1=y-\dfrac{-2(2x-y-1)}{2^2+(-1)^2}=\dfrac{4x+3y-2}{5}.\end{cases}$$

代入曲线 C 的方程得

$$\Big(\frac{-3x+4y+4}{5}+\frac{4x+3y-2}{5}\Big)^2+3\Big(\frac{-3x+4y+4}{5}\Big)+\frac{4x+3y-2}{5}=0,$$

化简整理得

$$C':x^2+14xy+49y^2-21x+103y+54=0.$$

一道“简单”双曲线题的“复杂”思考

310023 浙江省杭州外国语学校 李 辉

在高三的一节圆锥曲线复习课上, 笔者曾讲解了下面这道题. 由于题目本身并不难, 再加上笔者所教班级学生的基础比较好, 所以笔者认为讲解起来应该会很顺利, 但出乎意料的是, 笔者遇到了一些“麻烦”.

题目: 已知双曲线 C: $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 和直线 l: $y=kx+\sqrt{2}$, 而且直线 l 与双曲线 C 的右支有两个交点, 求 k 的取值范围.

笔者在课堂上提供了两种解法, 分别如下:

解法一: 考虑到双曲线的渐近线往往能决定直线与双曲线的交点数目, 因此可以用数形结合的思想来解此题.

如图1可知, 当直线 l 的斜率比双曲线的一条渐近线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 的斜率小, 但是比图中虚线 (通过点 $(0,\sqrt{2})$ 且与双曲线右支相切的直线) 的斜率大时, 直线 l 与双曲线的右支有两个交点.

由此容易解得 $-1<k<-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

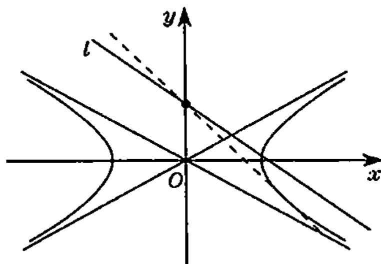


图1

解法二: 设直线 l 与双曲线 C 的交点为 $A(x_1,y_1)$ 和 $B(x_2,y_2)$, 由于交点在双曲线的右支上, 因此点 A、B 的横坐标应该都是正数, 也就是说

$$\begin{cases}x_1+x_2>0,\\ x_1x_2>0.\end{cases} \qquad ①$$

另一方面, 点 A、B 的坐标应是方程组

点评: 按上述解法不难得到以下推广:

曲线 $C:f(x,y)=0$ 关于直线 $l:Ax+By+C=0$ $(A^2+B^2\neq 0)$ 对称曲线 C' 的方程为

$$f\left(x-\frac{2A(Ax+By+C)}{A^2+B^2},\ y-\frac{2B(Ax+By+C)}{A^2+B^2}\right)=0.$$

总之, 一个数学结论的诞生过程应该更自然、更简洁、更美丽, 不能像魔术师帽子中的兔子那样突兀, 应该是“清水出芙蓉, 天然去雕饰”. 正如林群院士所说, 我们不要把数学弄得太复杂了, 数学思想方法应当是简单、平易近人的. 我们提倡“让解题思路来得自然些”, 解法的自然源于数学思想的自然, 因为数学思想本来就是自然平和的, 而本文更能体现这一点. 事实上, 本文所提及的方法并不高深, 甚至有点平凡, 然而将平凡的方法用到极致便是不平凡.

参考文献

[1] 姚格. 圆锥曲线的轴对称图形方程的求法 [J]. 数学教学, 2009(9): 28-29.

[2] 王志和. 点关于直线对称点的一种求法 [J]. 数学教学, 2010(5): 31-32.

[3] 魏正清. 点关于直线对称点的又一公式 [J]. 数学教学, 2011(6): 24-25.

[4] 张国治. 例谈单位向量的应用 [J]. 数学教学, 2011(6): 32-35.

[5] 徐章韬. 再论比较判断法解析高考题 [J]. 数学教学, 2012(4): 36-35.

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{3}-y^2=1,\\ y=kx+\sqrt{2}\end{cases}$$

的解, 从上述方程组中消去y, 并整理可得

$$(1-3k^2)x^2-6\sqrt{2}kx-9=0.\cdots\cdots\cdots ②$$

因此上述关于x的方程有两个解x_1、x_2, 而且

$$\begin{cases}1-3k^2\neq 0,\\ \Delta=72k^2+36(1-3k^2)>0,\\ x_1+x_2=\dfrac{6\sqrt{2}k}{1-3k^2}>0,\\ x_1x_2=\dfrac{-9}{1-3k^2}>0,\end{cases}\cdots\cdots ③$$

解这个不等式组可得

$$-1<k<-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

解法一的讲解很顺利, 但解法二讲完之后, 有学生提出了异议. 学生指出, 虽然解法二的答案是对的, 但是其中取值范围的考虑"欠妥", 正确的解法应该如下:

解法三: 因为双曲线方程$\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$中, x是有取值范围的, 在右支上的点的横坐标应该不小于$\sqrt{3}$, 因此解法二中, $\begin{cases}x_1\geqslant\sqrt{3},\\ x_2\geqslant\sqrt{3},\end{cases}$ 方程组①应该改写成

$$\begin{cases}x_1+x_2\geqslant 2\sqrt{3},\\ x_1x_2\geqslant 3.\end{cases}\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

③中不等式组对应的式子也应该改掉. 但最后的计算结果还是

$$-1<k<-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

虽然最后解出来的答案一样, 但是那位学生坚持认为笔者提供的解法二, 其过程是不正确的. 有意思的是, 在这位同学展示了他的解法之后, 班里31个学生中, 有25个认同解法三, 剩下的几个同学还拿不定主意!

这一现象立刻让笔者想到了如下问题:

问题一: 解法三中存在一个学生非常容易错的地方, 他们能发现并知道为什么吗?

问题二: 解法二实质上是正确的, 学生能否理解?

更广泛的问题是: 解法二为什么是正确的? 什么时候需要考虑变量的取值范围? 什么时候不需要考虑?

问题三: 解法三得到了正确答案, 这是否具有一般性?

针对这三个问题, 笔者和学生一起进行了积极思考和辨析, 花了整整一节习题课把这道"简单"的习题"复杂"化.

1. 关于问题一

在笔者明确提出解法三中的由$\begin{cases}x_1\geqslant\sqrt{3},\\ x_2\geqslant\sqrt{3}\end{cases}$得到$\begin{cases}x_1+x_2\geqslant 2\sqrt{3},\\ x_1x_2\geqslant 3,\end{cases}$值得仔细思考和分析, 并指出一般情况下会出错后, 学生思考一天仍然不能明确说出其中的理由来.

学生解法的问题是: 如果

$$p:\begin{cases}x_1\geqslant t,\\ x_2\geqslant t,\end{cases}\quad q:\begin{cases}x_1+x_2\geqslant 2t,\\ x_1x_2\geqslant t^2,\end{cases}$$

当$t=\sqrt{3}$时, p是q的充分不必要条件, 而不是充要条件(当$x_1=100$, $x_2=1$时, q成立, 但p不成立). 因此, 一般情况下, 按照p解出来的未知数取值范围, 是按q解出来的未知数取值范围的子集. 换句话讲, 按照④式解出来的k的取值范围, 理论上来讲是包含正确答案的.

但是, 给学生造成认知上困难的是: 当$t=0$时, p是q的充要条件! 而且, 在解析几何的有关题中, 我们还经常要用到这一点. 这个知识点高考也考过, 例如2009年高考浙江卷理科第2题:

已知a、b是实数, 则"$a>0$且$b>0$"是"$a+b>0$且$ab>0$"的$\cdots\cdots\cdots\cdots$( ).

(A) 充分不必要条件;

(B) 必要不充分条件;

(C) 充分必要条件;

(D) 既不充分也不必要条件.

该题的正确答案是(C).

在$t=0$和$t\neq 0$时, p与q的形式没变, 但是关系却完全不一样. 学生对$t=0$的情形是比较熟悉的, 但也会因此形成"反应定势", 从而造成认知上的困难[1]. 因此仔细思考和理清其中的关系, 深入了解结论不同的原因, 是非常重要的.

首先, 笔者和学生一起思考了如下问题: 在$t\neq 0$时, 怎样才能把p形式$\begin{cases}x_1\geqslant t,\\ x_2\geqslant t\end{cases}$改写

成有利于应用一元二次方程根与系数关系的形式呢? 不难知道, 我们只需把右边的t移到左边去, 然后按照上述高考题的形式改写即可, 也就是说

$$\begin{cases} x_1 \geqslant t, \\ x_2 \geqslant t \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (x_1 - t) + (x_2 - t) \geqslant 0, \\ (x_1 - t)(x_2 - t) \geqslant 0. \end{cases}$$

接着, 笔者带着学生以方程$x^2 + bx + c = 0$的两个解x_1、x_2为例, 探讨了$t = 0$和$t \neq 0$时, p与q关系的区别及其原因.

假设t是任意一个正数, 那么由

$$\begin{cases} b^2 - 4c > 0, \\ x_1 - t + x_2 - t = -b - 2t \geqslant 0, \\ (x_1 - t)(x_2 - t) = t^2 + bt + c \geqslant 0 \end{cases}$$

可得

$$\begin{cases} b^2 - 4c > 0, \\ b + 2t \leqslant 0, \\ bt + c + t^2 \geqslant 0. \end{cases}$$

用关于b、c的平面直角坐标系, 可以把b、c的取值范围形象地表示出来(图2中的阴影部分).

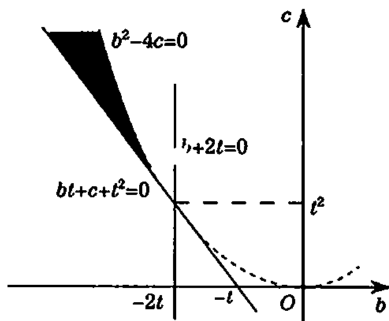


图2

而由

$$\begin{cases} b^2 - 4c > 0, \\ x_1 + x_2 = -b \geqslant 2t, \\ x_1 x_2 = c \geqslant t^2 \end{cases}$$

可以得到

$$\begin{cases} b^2 - 4c > 0, \\ b + 2t \leqslant 0, \\ c - t^2 \geqslant 0. \end{cases}$$

同样, 可以把b、c的取值范围形象地表示出来(图3中的阴影部分).

从图2和图3中可以明显地看出, 阴影部分表示的集合, 前者是后者的子集. 而且, 当$t = 0$时, 两个集合是相等的(图2中直线$bt + c + t^2 = 0$是抛物线$b^2 - 4c = 0$的切线).

也正因为如此, 解法三的正确写法应该如下:

解法四: 因为$\begin{cases} x_1 \geqslant \sqrt{3}, \\ x_2 \geqslant \sqrt{3}, \end{cases}$

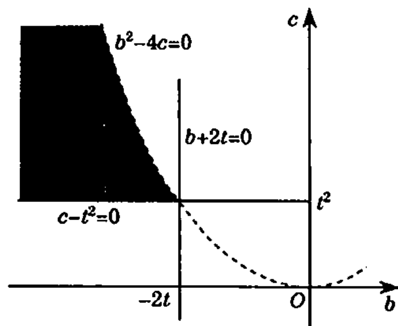


图3

所以$\begin{cases} x_1 - \sqrt{3} \geqslant 0, \\ x_2 - \sqrt{3} \geqslant 0, \end{cases}$ 因此方程组①应该改写成

$$\begin{cases} x_1 - \sqrt{3} + x_2 - \sqrt{3} \geqslant 0, \\ (x_1 - \sqrt{3})(x_2 - \sqrt{3}) \geqslant 0. \end{cases}$$

代入根与系数的关系后计算, 结果是

$$-1 < k < -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2. 关于问题二

解法二的正确性是比较隐蔽的.

一般情形下, $\begin{cases} x_1 > 0, \\ x_2 > 0 \end{cases}$ 是 $\begin{cases} x_1 \geqslant \sqrt{3}, \\ x_2 \geqslant \sqrt{3} \end{cases}$ 的必要不充分条件. 也就是说, 按照$\begin{cases} x_1 \geqslant \sqrt{3}, \\ x_2 \geqslant \sqrt{3} \end{cases}$所得到的取值范围是按照$\begin{cases} x_1 > 0, \\ x_2 > 0 \end{cases}$所得出的取值范围的子集. 从这个意义上来讲, 解法二"好像"是不准确的.

但是, 在(x_1, y_1)和(x_2, y_2)是方程$\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$的两个根的前提下, $\begin{cases} x_1 > 0, \\ x_2 > 0 \end{cases}$却是$\begin{cases} x_1 \geqslant \sqrt{3}, \\ x_2 \geqslant \sqrt{3} \end{cases}$的充要条件. 理由在于, 如果$(x, y)$是方程$\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$的根, 则$x \leqslant -\sqrt{3}$或$x \geqslant \sqrt{3}$, 因此在满足$x > 0$的前提下, 自然也就

有$x \geqslant \sqrt{3}$. 既然是充要条件, 那么用哪个不等式组来计算都是正确的.

基于同样的原因, 题目在条件$\begin{cases} x_1 > 1, \\ x_2 > 1 \end{cases}$下一样可以得到正确答案.

当然, 从另一方面来讲, 学生提出解法三是有理由的: 高中数学里, 需要特别注意变量隐含的取值范围的情况并不少见.

例如, 在求解不等式$\log_2 x < 32$的过程中, 要注意$x > 0$.

再比如, 已知直线$y = x + b$与曲线$x = \sqrt{1 - y^2}$有且仅有两个公共点, 求b的取值范围时, 如果用代数方法做的话, 在得到$2x^2 + 2bx + b^2 - 1 = 0$后, 要特别注意其中隐含的条件$x \geqslant 0$. 但有意思的是, 这里不需要考虑其中隐含的条件$x \leqslant 1$!

这样一来就产生了问题: 什么时候需要考虑变量的范围? 什么时候不用考虑? 碰到实际题目的时候怎样迅速地作出判断?

实际上, 要回答这个问题、使学生在解题时做到心中有数并不难: 在解题过程中, 对有关式子变形时, 如果使用的不是恒等变形, 则需考虑变量的取值范围 (考虑的范围只要保证变形是恒等的即可); 如果使用的是恒等变形, 则无需考虑变量的取值范围.

例如, 由$x = \sqrt{1 - y^2}$得到$x^2 = 1 - y^2$的过程不是恒等变形, 只有当$x \geqslant 0$时才是, 所以在后续的解题中需要加入限制条件$x \geqslant 0$; $x = \sqrt{1 - y^2}$中的隐含条件$x \leqslant 1$并没有影响到恒等变形, 所以无需考虑.

3. 关于问题三

既然从理论上讲, 按照$\begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 2a, \\ x_1 x_2 \geqslant a^2 \end{cases}$解出来的取值范围会比实际$\left(即\begin{cases} x_1 + x_2 > 0, \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases}\right)$小, 那么解法三为什么能得出正确答案呢? 与此相关的一个问题是: 能不能构造同类型的一道题目, 使大家感受到两种算法的区别呢? 出乎意料的是, 这个问题的答案是: 不能!

事实上, 解法三之所以能得到正确答案, 是因为根据$\begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 2a, \\ x_1 x_2 \geqslant a^2 \end{cases}$和$a > 0$可以得到$\begin{cases} x_1 + x_2 > 0, \\ x_1 x_2 > 0. \end{cases}$基于同样的原因, 从关于问题二的讨论可知, 在双曲线的背景下,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 > 0, \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases} 与 \begin{cases} x_1 \geqslant a, \\ x_2 \geqslant a \end{cases}$$

是等价的, 而根据$\begin{cases} x_1 \geqslant a, \\ x_2 \geqslant a \end{cases}$可以得到

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 2a, \\ x_1 x_2 \geqslant a^2, \end{cases}$$

所以逻辑上

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 2a, \\ x_1 x_2 \geqslant a^2 \end{cases} 与 \begin{cases} x_1 + x_2 > 0, \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases}$$

是等价的, 因此想构造出同类型的题目使得答案不一样也就成了不可能完成的任务.

但是, 如果把题目中的双曲线换成椭圆, 则可以构造出能说明区别的例子.

例如, 椭圆C: $\frac{x^2}{16} + y^2 = 1$和直线l: $y = kx + 2$有两个不同交点的条件是$k < -\frac{\sqrt{3}}{4}$或$k > \frac{\sqrt{3}}{4}$. 在此条件下, 设两个焦点的横坐标为x_1、x_2, 则:

当$\begin{cases} x_1 \geqslant 1, \\ x_2 \geqslant 1 \end{cases}$时, 可得

$$-2 + \frac{\sqrt{15}}{4} \leqslant k < -\frac{\sqrt{3}}{4};$$

当$\begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 2, \\ x_1 x_2 \geqslant 1 \end{cases}$时, 可得

$$-\frac{\sqrt{47}}{4} \leqslant k < -\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

以上从一道简单的双曲线题出发, 基于学生的反应和思维, 引发了 "复杂" 的思考和辨析, 说实话是笔者一开始处理题目时并未想到的, 这也充分说明了一线教学的复杂性. 作为一线教师, 要能够敏锐地发现学生知识结构中的 "缺陷", 并积极引导学生探究和分析问题的本质, 这不仅有利于学生知识结构的完备, 也有利于教师教学科研的进行.

(下转第10-37页)

用“再算一次”方法解决递推数列问题

226500 江苏省如皋中学 姚新国

1. 背景

(2011年全国高考江苏卷理科第20题) 设 M 为部分正整数组成的集合, 数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$, 前 n 项和为 S_n, 已知对任意整数 k 属于 M, 当 $n>k$ 时, $S_{n+k}+S_{n-k}=2(S_n+S_k)$ 都成立.

(1) 设 $M=\{1\}$, $a_2=2$, 求 a_5 的值;

(2) 设 $M=\{3,4\}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

1.1 说明

本题考查递推数列、数列通项 a_n 与前 n 项和 S_n 之间的关系、等差数列的性质等基础知识, 考查学生分析探究及运算推理的能力. “标准解答”的严谨性、思路和方法及运算推理的技巧性是非常高的, 在高考的特殊氛围下, 很少有学生能做出完整的、正确的结果, 能做到由 S_n 的递推关系式转化为 a_n 的递推关系式就非常不容易了. 在得到两个关于 a_n 的递推关系式后, 要通过替换两个关系式中序号 n 的值, 将部分项转化为相同项, 从而找到关系, 但在替换过程中序号 n 间隔较大(最大时为6), 为了缩小间隔, 又加大了序号 n 的约束(最大约束条件为 $n\geqslant 9$). 抽象程度之高, 超过了绝大部分考生的承受能力, 如何避开序号 n 的约束, 又尽快将间隔缩小到常规情形呢?

1.2 巧解探究

解: 第(1)小题略.

第(2)小题, 由 $k=3$, 当 $n>3$ 时, 有

$$S_{n+3}+S_{n-3}=2(S_n+S_3)\ (n\geqslant 4). \tag{1}$$

在(1)式中把 n 替换为 $n+1$ 再算一次得

$$S_{n+4}+S_{n-2}=2(S_{n+1}+S_3)(n\geqslant 3). \tag{2}$$

(2) − (1) 得 $a_{n+4}+a_{n-2}=2a_{n+1}\ (n\geqslant 4)$,

即
$$a_2,a_5,a_8,a_{11},a_{14},\cdots,a_{3k-1},\cdots \tag{3}$$
为等差数列;

$$a_3,a_6,a_9,a_{12},a_{15},a_{18},\cdots,a_{3k},\cdots \tag{4}$$
为等差数列;

$$a_4,a_7,a_{10},a_{13},a_{16},a_{19},\cdots,a_{3k+1},\cdots \tag{5}$$
为等差数列.

同理由 $k=4$, 当 $n>4$ 时有

$$S_{n+4}+S_{n-4}=2(S_n+S_4), \tag{6}$$

则 $a_{n+6}+a_{n-2}=2a_{n+2}(n\geqslant 4)$, 所以

$$a_2,a_6,a_{10},a_{14},a_{18},\cdots,a_{4k-2},\cdots \tag{7}$$

$$a_3,a_7,a_{11},a_{15},a_{19},\cdots,a_{4k-1},\cdots \tag{8}$$
为等差数列;

$$a_4,a_8,a_{12},a_{16},a_{20},\cdots,a_{4k},\cdots \tag{9}$$
为等差数列;

$$a_5,a_9,a_{13},a_{17},a_{21},\cdots,a_{4k+1},\cdots \tag{10}$$
为等差数列.

由(3)知 $a_{14}-a_2=4(a_5-a_2)$, 由(4)知 $a_{18}-a_6=4(a_6-a_3)$, 又由(7)知 $a_{14}-a_2=a_{18}-a_6$, 所以 $a_5-a_2=a_6-a_3$; 同理由(4)知 $a_{15}-a_3=4(a_6-a_3)$, 由(5)知 $a_{19}-a_7=4(a_7-a_4)$, 又由(8)知 $a_{15}-a_3=a_{19}-a_7$, 所以 $a_6-a_3=a_7-a_4$, 则(3)、(4)、(5)三个数列的公差相等, 所以

$$a_{n+3}=a_n+d_1(n\geqslant 2), \tag{11}$$

d_1 为常数. 同理可得

$$a_{n+4}=a_n+d_2(n\geqslant 2), \tag{12}$$

d_2 为常数. 在(11)式中把 n 替换为 $n+1$ 再算一次得

$$a_{n+4}=a_{n+1}+d_1(n\geqslant 1), \tag{13}$$

由(13) − (12)得 $a_{n+1}=a_n+d_2-d_1(n\geqslant 2)$, 设 $d_2-d_1=d_3$, 所以数列 $\{a_n\}$ 从第二项起为等差数列 $a_{n+1}=a_n+d_n=a_1+(n-1)d$, 在(1)中令 $n=4$, 且在(6)中令 $n=5$, 则得 $\begin{cases}S_7+S_1=2(S_4+S_3),\\ S_9+S_1=2(S_5+S_4),\end{cases}$ 解得 $a_2=3,d_3=2$, 故数列 $\{a_n\}$ 为等差数列 $a_n=2n-1$.

1.3 点评

在含有多个递推关系式的问题中, 我们可以逐个将各个递推关系式的序号 n 通过替换为 $\cdots$, $n-2,n-1$, $n+1,n+2$, $\cdots$ 中一值

再算一次, 得到一些结论, 然后再综合起来, 得到数列 $\{a_n\}$ 的有关性质.

1.4 推广

(1) 当 $M=\{3,5\}$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$, 前 n 项和为 S_n, 已知对于 $k\in M$, 当 $n>k$ 时, $S_{n+k}+S_{n-k}=2(S_n+S_k)$ 都成立, 则数列的通项公式 $a_n=2n-1$.

(2) 设 $M=\{p,q\}$, 常数 p,q 为互质的正整数, 数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$, 前 n 项和为 S_n, 已知对任意整数 $k\in M$, 当 $n>k$ 时, $S_{n+k}+S_{n-k}=2(S_n+S_k)$ 都成立, 则数列的通项公式 $a_n=2n-1$.

1.5 总结

在有关数列问题中, 将递推关系式中的 n 替换为 $\cdots$, $n-2$, $n-1$, $n+1$, $n+2,\cdots$ 中一值, 得到这两个值表示的关系式, 再将这两个关系式相加或相减, 可以得到我们需要的结论. 这样在解决有关"递推数列"问题时是一种行之有效的基本方法.

2. 将 n 替换为 $\cdots$, $n-2$, $n-1$, $n+1$, $n+2$, $\cdots$ 中一值"再算一次"法

数列 $\{a_n\}$ 中, 前 n 项的和为 S_n, 有 $a_n=\begin{cases}S_1 & (n=1)\\ S_n-S_{n-1} & (n\geqslant 2).\end{cases}$ 在解决数列问题时有数列 $\{a_n\}$ 多个项的递推式, 将 n 替换为 $\cdots$, $n-2$, $n-1,n+1,n+2$ $\cdots$ 中一值, 得到一个新的式子, 再在此基础上将两个式子整体处理得到一个新结论的方法.

在一般只含有数列 $\{a_n\}$ 相邻两项或三项的递推关系式中, 可以通过累加、累乘、利用等差数列或等比数列的性质、构造新数列等途径直接处理, 但是如果表达式中出现了含有数列通项 a_n 与数列前 n 项和 S_n 之间的关系式, 可将 n 替换为 $\cdots$, $n-2$, $n-1,n+1,n+2$, $\cdots$ 中一值, 转化为相邻两项或三项之间的递推关系来处理.

3. "再算一次"方法的应用

3.1 在含有 a_n 与 S_n 的递推关系式中的应用

例1 数列 $\{a_n\}$ 中, S_n 为数列的前 n 项和, $a_1=a,a_2=b$, $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$. 证明数列 $\{a_n\}$ 为等差数列.

分析: 要证明数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 依据定义必须有 $a_{n+1}-a_n=d$ (d 为常数) 对 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立, 为了得到此结论, 一是求出通项公式; 二是找到相邻三项之间的关系为 $2a_n=a_{n+1}+a_{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$. $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$ 中体现的是前 n 项和 S_n 与 a_n 之间的递推关系, 若再算一次, 将两式相减后整理, 则转化为相邻两项之间的关系问题.

证明: 由 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ $(n\geqslant 1)$, (1)

在 (1) 式中把 n 替换为 $n+1$ 再算一次, 则有 $S_{n+1}=\dfrac{(n+1)(a_1+a_{n+1})}{2}$. (2)

(2) − (1) 得 $2(S_{n+1}-S_n)=(n+1)(a_{n+1}+a_1)-n(a_n+a_1)$, 整理得

$(n-1)a_{n+1}=na_n-a_1(n\geqslant 1)$. (3)

在 (3) 式中把 n 再次替换为 $n+1$ 再算一次, 则有 $na_{n+2}=(n+1)a_{n+1}-a_1$. (4)

(4) − (3) 整理得 $2na_{n+1}=na_n+na_{n+2}$, 所以 $2a_{n+1}=a_{n+2}+a_n(n\geqslant 1)$, 故有

$a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}=\cdots=a_2-a_1$ 为常数, 所以数列 $\{a_n\}$ 为等差数列.

说明: 在含有 S_n 与 a_n 的递推关系式中, 若将 n 替换为 $\cdots,n-2$, $n-1$, $n+1,n+2$, $\cdots$ 中一值, 再算一次, 将此式与已知式两式相减则可以减少递推关系式中项的个数.在只有相邻两项之间的递推关系中, 直接求解比较困难时也可以再算一次, 则得到相邻三项之间的关系式, 再利用等差数列的性质求解.

3.2 在含有数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和 S_n、S_{n+1} 的递推关系式中的应用

例2 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 已知 $a_1=1,a_2=6,a_3=11$, 且

$(5n-8)S_{n+1}-(5n+2)S_n=An+B,n=1,2,3,\cdots$, 其中 A、B 为常数.

(1) 求 A 与 B 的值;

(2) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列;

(3) 证明: 不等式 $\sqrt{5a_{mn}}-\sqrt{a_ma_n}>1$ 对任何正整数 m,n 都成立.

分析第 (2) 小题, 由已知条件比较难求得 S_n 的表达式, 故必须将 S_{n+1}、S_n 的递推关系式转化为数列 $\{a_n\}$ 中项与项之间的递推关系式. 为了能够较顺利地转化, 要先

将S_n、S_{n+1}前的系数尽量转化为常数, 然后再利用"再算一次"法, 则可求解.

证明: 由第(1)小题求得$A=-20, B=-8$, 得$(5n-8)S_{n+1}-(5n+2)S_n=-20n-8$,

整理$(5n-8)(S_{n+1}-S_n)-10S_n=-20n-8$, 所以$(5n-8)a_{n+1}-10S_n=-20n-8$, (1)

在(1)式中把n替换为$n+1$再算一次有
$(5n-3)a_{n+2}-10S_{n+1}=-20(n+1)-8$, (2)

(2) − (1)得
$(5n-3)a_{n+2}-(5n+2)a_{n+1}=-20(n\geqslant 1)$, (3)

在(3)式中把n再次替换为$n+1$再算一次有$(5n+2)a_{n+3}-(5n+7)a_{n+2}=-20$, (4)

(4)−(3)得$(5n+2)a_{n+3}-(10n+4)a_{n+2}+(5n+2)a_{n+1}=0$, 整理得

$2a_{n+2}=a_{n+3}+a_{n+1}(n\geqslant 1)$,

所以$a_n-a_{n-1}=a_{n-1}-a_{n-2}=a_{n-2}-a_{n-3}=\cdots=a_3-a_2$, 又$a_3-a_2=5, a_2-a_1=5$, 所以$a_3-a_2=a_2-a_1$, 故数列$\{a_n\}$为等差数列.

说明: 在只有S_n、S_{n+1}的递推关系式中, 若将n替换为其他值再算一次, 然后将两式相减, 则可以转化为$\{a_n\}$中相邻项之间的关系式, 然后再次应用这种方法, 则将原有递推式中常数项消去, 将递推式转化为项与项之间的递推关系式.

3.3 在含有数列$\{a_n\}$中的不相邻项或多项的数列中的应用

例3 设数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$满足: $b_n=a_n-a_{n+2}$, $c_n=a_n+2a_{n+1}+3a_{n+2}$ (n=1, 2, 3,$\cdots$), 证明$\{a_n\}$为等差数列的充分必要条件是$\{c_n\}$为等差数列且$b_n\leqslant b_{n+1}$ (n=1, 2, 3,$\cdots$).

分析: 由数列$\{a_n\}$为等差数列, 很容易知道$\{b_n\}$为常数列, 则$b_{n+1}=b_n$, $c_{n+1}-c_n$为常数, 所以$\{c_n\}$为等差数列. 反之可猜想$\{c_n\}$为等差数列时, $\{b_n\}$为常数列. 进一步用a_n表示a_{n+2}, 则c_n的表达式可以转化为只含有a_n、a_{n+1}之间的关系式.

证明: 必要性是显然的.

下面证明充分性.

设数列$\{c_n\}$的公差为d_1, 因为

$c_n=a_n+2a_{n+1}+3a_{n+2}$, (1)

在(1)式中把n替换为$n+2$, 算一次有

$c_{n+2}=a_{n+2}+2a_{n+3}+3a_{n+4}$. (2)

(1) − (2)得$c_n-c_{n+2}=(a_n-a_{n+2})+2(a_{n+1}-a_{n+3})+3(a_{n+2}-a_{n+4})$, 所以

$-2d_1=b_n+2b_{n+1}+3b_{n+2}(n\geqslant 1)$, (3)

在(3)式中把n替换为$n+1$, 再算一次有

$-2d_1=b_{n+1}+2b_{n+2}+3b_{n+3}$. (4)

将(4)−(3)得$(b_{n+1}-b_n)+2(b_{n+2}-b_{n+1})+3(b_{n+3}-b_{n+2})=0$, (5)

因为$b_{n+1}-b_n\geqslant 0$恒成立, 所以由(5)式得$b_{n+1}=b_n(n\geqslant 1)$, 不妨设$b_n=c$($c$为常数), 所以$a_{n+2}=a_n-c$, 则

$c_n=4a_n+2a_{n+1}-3c$. (6)

在(6)式中把n再次替换为$n+1$, 再算一次有$c_{n+1}=4a_{n+1}+2a_{n+2}-3c$, (7)

(7) − (6)得$d_1=2(a_{n+2}-a_n)+2(a_{n+1}-a_n)$, 所以$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}d_1+c(n\geqslant 1)$, 而$\frac{1}{2}d_1+c$为常数, 所以$\{a_n\}$为等差数列.

推广(1) 设数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$满足: $b_n=a_n-a_{n+k}$(常数$k\in\mathbf{N}^*$), $c_n=a_n+2a_{n+1}+\cdots+ka_{n+k-1}+(k+1)a_{n+k}$($n$=1, 2, 3,$\cdots$), 则$\{a_n\}$为等差数列的充分必要条件是$\{c_n\}$为等差数列, 且$b_n\leqslant b_{n+1}$ (n=1, 2, 3,$\cdots$).

(2) 设数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$满足: $b_n=a_n-a_{n+k}$(常数$k\in\mathbf{N}^*$), $c_n=d_0a_n+d_1a_{n+1}+\cdots+d_{k-1}a_{n+k-1}+d_ka_{n+k}$ (n=1, 2, 3,$\cdots$), 其中$d_0, d_1, d_2, d_3, \cdots, d_k$是给定的各项同号的单调数列, 则$\{a_n\}$为等差数列的充分必要条件是$\{c_n\}$为等差数列, 且$b_n\leqslant b_{n+1}$ (n=1, 2, 3,$\cdots$).

说明: 在含有数列$\{a_n\}$中多个项的新数列通项中, 为了找到新数列是否为等差数列, 需要将n替换为$n+1, n+2, \cdots$中一值, 再算一次. 本题由于$b_n=a_n-a_{n+2}$, 所以将n替换为$n+2$, 则可找到规律, 若将n替换为$n+1$则较难发现规律.

4. 几点思考

(1)解决这类问题的关键是把已知条件中的变量n替换为$\cdots, n-2, n-1, n+1, n+2, \cdots$等等, 再算一次.在研究问题时到底把$n$替换为哪个值便于求解, 需要我们在解题中观察思考, 当然这说起来容易, 做起来不容易, 这需要我们多积累、多总结, 更需要灵机一动的直觉.

(下转封底)

求函数$f(x)=\sqrt{x^2\pm b^2}+mx$最值的几种方法

200444 上海大学附属中学 钱寒静 201908 上海市罗店中学 徐艳华
201900 上海市宝山区教师进修学院 王凤春

贵刊于2008年第7期刊登了《利用TI图形计算器研究一类函数的最值》一文[1]，笔者读后深受启发. 也用TI图形计算器做了同样的实践，不仅取得了良好的效果，激发了学生的探索热情，还得出了另外一些奇妙的解法. 本文就这类函数的最值问题，给出研究的结果.

问题：求形如函数$f(x)=\sqrt{x^2+b^2}+mx$ $(0<|m|<1,b>0)$的最值.

一、基本不等式法

原函数可化成$f(x)=\dfrac{1+m}{2}(\sqrt{x^2+b^2}+x)+\dfrac{1-m}{2}(\sqrt{x^2+b^2}-x)$的形式，运用基本不等式求$f(x)$的最小值及此时$x$的取值. 因为

$$\frac{1+m}{2}(\sqrt{x^2+b^2}+x)+\frac{1-m}{2}(\sqrt{x^2+b^2}-x)\geqslant 2\sqrt{\frac{1+m}{2}(\sqrt{x^2+b^2}+x)\cdot\frac{1-m}{2}(\sqrt{x^2+b^2}-x)}=b\sqrt{1-m^2},$$

当且仅当$\dfrac{1+m}{2}(\sqrt{x^2+b^2}+x)=\dfrac{1-m}{2}(\sqrt{x^2+b^2}-x)$，即$x=-\dfrac{bm}{\sqrt{1-m^2}}$时，等号成立. 所以$f(x)_{\min}=b\sqrt{1-m^2}$.

函数关系式的变形，反映了学生对基本不等式的理解；变形的目的是使两式之积为定值，问题的解决反映了学生对基本不等式本质的理解.

二、三角代换法

设$x=b\tan\theta(-90^\circ<\theta<90^\circ)$，则$y=\dfrac{b(1+m\sin\theta)}{\cos\theta}$. 又设$\tan\dfrac{\theta}{2}=t(-1<t<1)$，则

$$y=\frac{b(1+t^2+2mt)}{1-t^2}=-b+\frac{2b(mt+1)}{1-t^2}.$$

再设$mt+1=s(0<s<2)$，则

$$y=-b-\frac{2bm^2}{s+\dfrac{1-m^2}{s}-2}\geqslant -b-\frac{2bm^2}{2\sqrt{1-m^2}-2}=b\sqrt{1-m^2},$$

当且仅当$s=\sqrt{1-m^2}$时等号成立.

三次换元，思路自然，简洁流畅.

三、构造双曲线法

令$\begin{cases}\sqrt{x^2+b^2}=x',\\ mx=y',\end{cases}$化简得$x'^2-\dfrac{y'^2}{m^2}=b^2(x'\geqslant 0)$.

此时，函数$y=\sqrt{x^2+b^2}+mx\iff y'=-x'+y$.

问题转化为：在坐标系$x'Oy'$中，当点(x',y')在双曲线$x'^2-\dfrac{y'^2}{m^2}=b^2(x'\geqslant 0)$上运动时，求直线$y'=-x'+y$截距$y$的最值.

$x'^2-\dfrac{y'^2}{m^2}=b^2(x'\geqslant 0)$为焦点在$x'$轴上双曲线的右支，渐近线的斜率为$\pm m$. 如图1，因为$0<|m|<1$，所以，当直线与双曲线右支相切时，$y$取最小值.

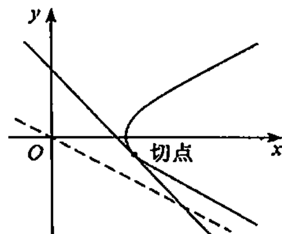


图1

由$\begin{cases}x'^2-\dfrac{y'^2}{m^2}=b^2,\\ y'=-x'+y,\end{cases}$得$(m^2-1)x'^2+2yx'-y^2-b^2m^2=0$，令$\Delta=0\Rightarrow y^2=b^2(1-m^2)$.

因此$y_{\min}=b\sqrt{1-m^2}$，切点坐标为

$\left(\frac{b}{\sqrt{1-m^2}}, -\frac{bm^2}{\sqrt{1-m^2}}\right)$, 此时, 由 $y' = mx$ 得 $x = -\frac{bm}{\sqrt{1-m^2}}$.

利用构造思想, 将函数的最值问题转化为直线与双曲线的位置关系问题, 使问题直观, 易于解决.

四、构造向量法

设 $\vec{u} = \left(\sqrt{\frac{1}{2}(1+m)(\sqrt{x^2+b^2}+x)}, \sqrt{\frac{1}{2}(1-m)(\sqrt{x^2+b^2}-x)}\right)$,

$\vec{v} = \left(\sqrt{\frac{1}{2}(1-m)(\sqrt{x^2+b^2}-x)}, \sqrt{\frac{1}{2}(1+m)(\sqrt{x^2+b^2}+x)}\right)$, 则 $f(x) = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$.

因为 $|\vec{u}|\cdot|\vec{v}| \geqslant \vec{u}\cdot\vec{v} = b\sqrt{1-m^2}$, 所以 $f(x)_{\min} = b\sqrt{1-m^2}$, 当且仅当 $\vec{u}/\!/\vec{v}$ 时等号成立, 此时 $x = -\frac{bm}{\sqrt{1-m^2}}$.

此法的关键在于构造的两个向量, 既要满足 $f(x) = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$, 又要满足 $\vec{u}\cdot\vec{v}$ 自然地消去 x, 方法之巧妙, 令人赞叹.

五、构造复数法

设 $z_1 = \sqrt{(1+m)(\sqrt{x^2+b^2}+x)} + \mathrm{i}\sqrt{(1-m)(\sqrt{x^2+b^2}-x)}$,

$z_2 = \sqrt{(1-m)(\sqrt{x^2+b^2}-x)} + \mathrm{i}\sqrt{(1+m)(\sqrt{x^2+b^2}+x)}$, 由 $|z_1| + |z_2| \geqslant |z_1+z_2|$ 得 $\sqrt{x^2+b^2}+mx \geqslant b\sqrt{1-m^2}$, 即 $f(x)_{\min} = b\sqrt{1-m^2}$, 当且仅当 $z_1 = kz_2$ 时等号成立, 此时 $x = -\frac{bm}{\sqrt{1-m^2}}$.

构造的两个复数, 巧妙地使 $|z_1|$、$|z_2|$ 和 $|z_1+z_2|$ 均出现了 $\sqrt{x^2+b^2}+mx$, 并且没有其他含 x 的项, 使问题得以解决.

六、构造数组法

记 $x_1 = \sqrt{(1+m)(\sqrt{x^2+b^2}+x)}$, $x_2 = \sqrt{(1-m)(\sqrt{x^2+b^2}-x)}$ 是一个数组, 由公式 $\frac{x_1^2+x_2^2}{2} \geqslant \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2$ 易得 $\sqrt{x^2+b^2}+mx \geqslant b\sqrt{1-m^2}$, 即 $f(x)_{\min} = b\sqrt{1-m^2}$.

这个公式借助于一组数的平方的平均数与平均数的平方之间的关系, 巧妙的构造使一组数和的平方与 $f(x)$ 建立了联系, 彰显了数学的奇异美.

方法四、五、六显然是受方法一的启发, 在构造思想的指导下, 设计不同的数学模型完成解答, 每一种构造都神奇、美妙, 这说明学生充分理清了问题的本质及知识之间的内部联系. 教学中, 我们常说: 要建构知识网络, 形成知识的联系. 这个问题的解决是更深层次的知识网络建构.

若问题变成 $f(x) = \sqrt{x^2-b^2}+mx(m \neq 0, b>0)$ 的形式, 应用上述方法同样可以解决问题, 结论如下:

(1) 当 $m>1$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty,-b]$ 上有最大值, 即 $f(x)_{\max} = -b\sqrt{m^2-1}$, 此时 $x = -\frac{bm}{\sqrt{m^2-1}}$;

(2) 当 $m<-1$时, $y=f(x)$ 在 $[b,\infty)$ 上有最大值, 即 $f(x)_{\max} = -b\sqrt{m^2-1}$, 此时 $x = -\frac{bm}{\sqrt{m^2-1}}$;

(3) 当 $-1 \leqslant m < 0$时, $f(x)_{\min} = f(b) = bm$;

(4) 当 $0 < m \leqslant 1$时, $f(x)_{\min} = f(-b) = -bm$.

参考文献

[1] 王凤春. 用TI图形计算器研究一类的最值. 数学教学, 2008(7): 6.

一类无理式函数值域问题的统一解法

200023 上海市卢湾高级中学 陈立强

求函数值域是高中数学教学的重点和难点, 文[1]探讨了一类无理式函数最大值的解法, 经过研究, 笔者给出这类非单调无理式函数值域的一种统一解法, 即通过换元转化为研究直线与圆锥曲线(段)的关系.

一、形如$f(x)=\sqrt{ax+b}+\sqrt{-cx+d}$(其中a、c > 0)

例1 求函数$y=\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x}$的值域.

解: 令$u=\sqrt{2x+1}$, $v=\sqrt{3-2x}$, 则$u^2+v^2=4$ $(u\geqslant 0, v\geqslant 0)$, $y=u+v$.

因此, 所求函数的值域转化为在平面直角坐标系uOv中, 当直线$y=u+v$与圆弧$u^2+v^2=4\,(u\geqslant 0, v\geqslant 0)$有公共点时$y$的取值范围.

l: $v=-u+y$表示斜率为-1且在v轴上的截距为y的直线系.

当l与圆弧相切时(如图1),

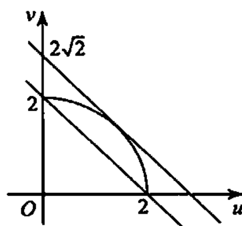


图1

圆心到直线l: $u+v-y=0$的距离$d=\dfrac{|0+0-y|}{\sqrt{1+1}}=2$,

解得$y=\pm 2\sqrt{2}$(负值舍去),

故$y_{\max}=2\sqrt{2}$.

当$y<2$时, 直线$v=-u+y$与圆弧没有交点, 故$y_{\min}=2$.

所以所求函数的值域为$[2,2\sqrt{2}]$.

例2 求函数$y=\sqrt{2x+1}+\sqrt{1-x}$的值域.

解: 令$u=\sqrt{2x+1}$, $v=\sqrt{1-x}$, 则$\dfrac{u^2}{3}+\dfrac{2v^2}{3}=1$ $(u\geqslant 0, v\geqslant 0)$, $y=u+v$.

因此, 所求函数的值域转化为在平面直角坐标系uOv中, 当直线$y=u+v$与椭圆段$\dfrac{u^2}{3}+\dfrac{2v^2}{3}=1\,(u\geqslant 0, v\geqslant 0)$有公共点时$y$的取值范围.

l: $v=-u+y$表示斜率为-1且在v轴上的截距为y的直线系.

当l与椭圆段相切时(如图2),

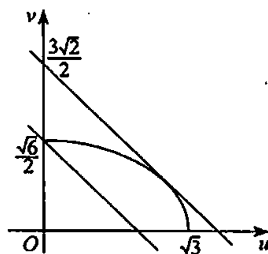


图2

由$\begin{cases} v=-u+y, \\ \dfrac{u^2}{3}+\dfrac{2v^2}{3}=1 \end{cases}$得

$3u^2-4yu+(2y^2-3)=0$,

$\therefore \Delta=(-4y)^2-4\times 3\times(2y^2-3)=0$, 解得$y=\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$(负值舍去),

故$y_{\max}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

当$y<\dfrac{\sqrt{6}}{2}$时, 直线$v=-u+y$与椭圆段没有交点, 故$y_{\min}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

所以所求函数的值域为$\left[\dfrac{\sqrt{6}}{2},\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right]$.

二、形如$f(x)=\sqrt{ax+b}-\sqrt{cx+d}$(其中a、c > 0)

例3 求函数$y=\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-1}$的值域.

解: 令 $u=\sqrt{2x+1}$, $v=\sqrt{x-1}$, 则 $\frac{u^2}{3}-\frac{2v^2}{3}=1\,(u\geqslant 0,\ v\geqslant 0)$, $y=u-v$.

因此, 所求函数的值域转化为在平面直角坐标系 uOv 中, 当直线 $y=u-v$ 与双曲线段 $\frac{u^2}{3}-\frac{2v^2}{3}=1\ (u\geqslant 0,\ v\geqslant 0)$ 有公共点时 y 的取值范围.

l: $v=u-y$ 表示斜率为1且在 v 轴上的截距为 $-y$ 的直线系.

当 l 与双曲线段相切时,

由 $\begin{cases} v=u-y, \\ \frac{u^2}{3}-\frac{2v^2}{3}=1 \end{cases}$ 得

$u^2-4yu+(2y^2+3)=0$,

$\therefore \Delta=(-4y)^2-4\times(2y^2+3)=0$, 解得 $y=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$ (负值舍去).

要使 l 与双曲线段 $\frac{u^2}{3}-\frac{2v^2}{3}=1\,(u\geqslant 0,\ v\geqslant 0)$ 有交点 (如图3),

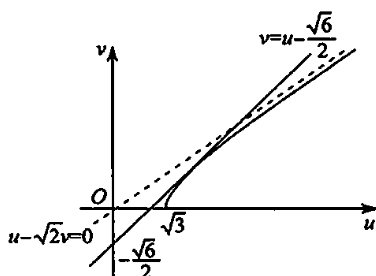


图3

则 $-y\leqslant-\frac{\sqrt{6}}{2}$, 解得 $y\geqslant\frac{\sqrt{6}}{2}$,

所以所求函数的值域为 $\left[\frac{\sqrt{6}}{2},+\infty\right)$.

例4 求函数 $y=\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+1}$ 的值域.

解: 令 $u=\sqrt{2x-1}$, $v=\sqrt{x+1}$, 则 $\frac{2v^2}{3}-\frac{u^2}{3}=1\ (u\geqslant 0,\ v\geqslant 0)$, $y=u-v$.

因此, 所求函数的值域转化为在平面直角坐标系 uOv 中, 当直线 $y=u-v$ 与双曲线段 $\frac{2v^2}{3}-\frac{u^2}{3}=1\,(u\geqslant 0, v\geqslant 0)$ 有公共点时 y 的取值范围.

l: $v=u-y$ 表示斜率为1且在 v 轴上的截距为 $-y$ 的直线系.

要使 l 与双曲线段 $\frac{2v^2}{3}-\frac{u^2}{3}=1\,(u\geqslant 0,\ v\geqslant 0)$ 有交点 (如图4),

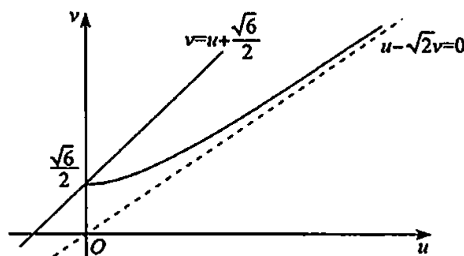


图4

则 $-y\leqslant\frac{\sqrt{6}}{2}$, 解得 $y\geqslant-\frac{\sqrt{6}}{2}$, 所以所求函数的值域为 $\left[-\frac{\sqrt{6}}{2},+\infty\right)$.

参考文献

[1] 米召奎. 对一类无理式函数最大值的求法探讨[J]. 上海中学数学, 2012 (4): 12-13.

(上接第10-30页)

从这一方面来讲, 一线教师应该注重在行动中反思, 从课堂本身出发, 加强实践和案例研究. 这也诚如文[2]中所说的, "偏重教学原理(原则, 观念)难免空泛, 强调教学经验(技能, 技巧)易致盲目, 以案例为基础的探讨恰好可以弥补这两者的缺失".

参考文献

[1] (美) Anita Woolfolk 著, 何先友等译. 教育心理学(第十版) [M]. 北京: 中国轻工业出版社, 2008.

[2] 顾泠沅, 易凌峰, 聂必凯. 寻找中间地带(国际数学教育改革的大趋势) [M]. 上海: 上海教育出版社, 2003.

解决一类无理函数值域的向量方法

523005 广东省东莞市东莞中学 赵银仓

1. 问题源起

问题1 设$a>0$, $d<0$, 且$ac>bd$, 求函数$f(x)=\sqrt{ax+b}+\sqrt{c+dx}$ $\left(-\frac{b}{a}\leqslant x\leqslant-\frac{c}{d}\right)$的值域.

这类由根式和构成的无理函数, 其值域问题对学生来说是一个难题, 解决此问题的通法是利用导数研究函数的性质, 揭示其函数值变化的规律后获得所求值域. 但由于根式的存在, 使这种方法的运算量很大, 学生要完成解答难度较大. 利用圆锥曲线可直观解释, 但过程太长, 学生难以掌握, 更不易表述清楚. 怎样使问题的解决过程符合学生的认知特点, 思路自然, 直观明了, 运算量适宜, 能揭示问题的本质, 则是我们进一步探究的方向.

2. 用平面向量探究求解

分析: 注意到函数的表达式为两个根式的和这一特征, 联想向量数量积的坐标表示式, 二者都为两个算式的和这一共同点, 构造向量来探究求解.

解: 因为$f(x)=\sqrt{ax+b}+\sqrt{c+dx}=\sqrt{a}\sqrt{x+\frac{b}{a}}+\sqrt{-d}\sqrt{-\frac{c}{d}-x}$, 所以在平面直角坐标系$xOy$中, 设点$M(\sqrt{a},\sqrt{-d})$、$N\left(\sqrt{x+\frac{b}{a}},\sqrt{-\frac{c}{d}-x}\right)$, 则$\overrightarrow{OM}=(\sqrt{a},\sqrt{-d})$, $\overrightarrow{ON}=\left(\sqrt{x+\frac{b}{a}},\sqrt{-\frac{c}{d}-x}\right)$, 故$f(x)=\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$.

从几何上看, 由于$\left|\overrightarrow{OM}\right|=\sqrt{a-d}$, $\left|\overrightarrow{ON}\right|=\sqrt{\frac{b}{a}-\frac{c}{d}}=\sqrt{\frac{bd-ac}{ad}}$, 因此定点$M$在第一象限, 动点$N$在以原点为圆心, 半径$r=\sqrt{\frac{bd-ac}{ad}}$的圆在第一象限的圆弧$\overset{\frown}{AB}$上(含端点).

当向量$\overrightarrow{ON}$与向量$\overrightarrow{OM}$同向时, 向量$\overrightarrow{ON}$在其上的投影取得最大值, 因而它们的数量积取得最大值, 故$f(x)_{\max}=\left|\overrightarrow{OM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{ON}\right|=\sqrt{a-d}\cdot\sqrt{\frac{bd-ac}{ad}}=\sqrt{\frac{(a-d)(bd-ac)}{ad}}$.

当动点N运动到两个坐标轴的正半轴时, 向量$\overrightarrow{ON}$在向量$\overrightarrow{OM}$上的投影有一个取得最小值, 因而它们的数量积最小值就是圆弧$\overset{\frown}{AB}$的两个端点所对应的两个向量分别与向量$\overrightarrow{OM}$的数量积中的最小者.

(1) 若$a=-d$, 如图1, 当动点N与点A或B重合时, 此时$A\left(\sqrt{\frac{b+c}{a}},0\right)$, $B\left(0,\sqrt{\frac{b+c}{a}}\right)$, $f(x)_{\min}$
$=\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OA}=(\sqrt{a},\sqrt{a})\cdot\left(\sqrt{\frac{b+c}{a}},0\right)=\sqrt{b+c}$.

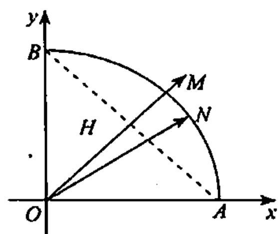


图1

(2) 若$a<-d$, 如图2, 当动点N与点A重合时, 此时$A\left(\sqrt{\frac{bd-ac}{ad}},0\right)$, $f(x)_{\min}=\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OA}=(\sqrt{a},\sqrt{-d})\cdot\left(\sqrt{\frac{bd-ac}{ad}},0\right)=\sqrt{b-\frac{ac}{d}}$.

(3) 若$a>-d$, 如图3, 当动点N与点B重合时, 此时$B\left(0,\sqrt{\frac{bd-ac}{ad}}\right)$, $f(x)_{\min}=\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OB}=(\sqrt{a},\sqrt{-d})\cdot\left(0,\sqrt{\frac{bd-ac}{ad}}\right)=\sqrt{c-\frac{bd}{a}}$.

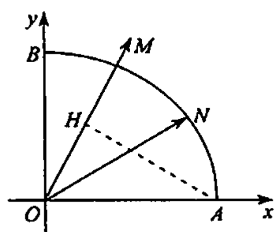


图2

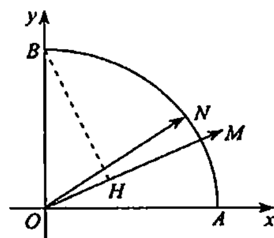


图3

评析: 类比平面向量, 应用向量数量积的几何意义, 从直观上分析、揭开问题的本质, 将代数与几何融为一体, 思路直接、自然, 运算量大为降低.

3. 用向量法求解推广问题

问题2 设$a>0$, $c>0$, $d<0$, 求函数$f(x)=ax+\sqrt{c+dx^2}$的值域.

解: 在直角平面坐标系xOy中, 设点$M(a,\sqrt{-d})$、$N\left(x,\sqrt{-\frac{c}{d}-x^2}\right)$, 则$\overrightarrow{OM}=(a,\sqrt{-d})$, $\overrightarrow{ON}=\left(x,\sqrt{-\frac{c}{d}-x^2}\right)$, 故$f(x)=\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$.

从几何上看, 由于$\left|\overrightarrow{OM}\right|=\sqrt{a^2-d}$, $\left|\overrightarrow{ON}\right|=\sqrt{-\frac{c}{d}}$, 因此点$M$为第一象限定点, 动点$N$在以原点为圆心, 半径$r=\sqrt{-\frac{c}{d}}$的圆在$x$轴上方的半圆弧$\overset{\frown}{AB}$上(含端点), 如图4.

当向量$\overrightarrow{ON}$与向量$\overrightarrow{OM}$同向时, 向量$\overrightarrow{ON}$在其上的投影取得最大值, 因而它们的数量积取得最大值, 故$f(x)_{\max}=\left|\overrightarrow{OM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{ON}\right|=\sqrt{a^2-d}\cdot\sqrt{-\frac{c}{d}}=\sqrt{c-\frac{a^2c}{d}}$.

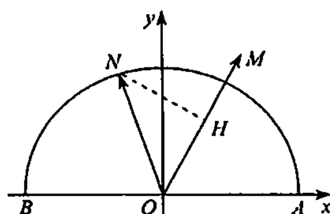


图4

当动点N与点B重合时, 向量$\overrightarrow{ON}$在向量$\overrightarrow{OM}$上的投影取得最小值, 因而它们的数量积就取得最小值. 因为点$B\left(-\sqrt{-\frac{c}{d}},0\right)$, 故$f(x)_{\min}=(a,\sqrt{-d})\cdot\left(-\sqrt{-\frac{c}{d}},0\right)=-a\sqrt{-\frac{c}{d}}$.

评析: 恰当地构造向量, 将问题转化为半圆上动点在过原点的射线上的投影问题, 仅用平面几何知识就能得出结论, 过程十分简洁, 无需记有关结论, 减轻了记忆的负担, 同时也避免了因记忆失误而出错.

4. 结束语

波利亚认为"用和学生知识相称的题目来激起他们的好奇心, 并用一引起激励性的问题去帮助他们解答题目, 那么就能培养学生独立思考的兴趣和习惯, 并教给他们某些方法."前面的问题尽管学生感到有点困难, 但解决问题所用的知识点都为学生已学过, 问题对他们来说是相称的. 在问题的解决中, 向量方法的引入, 极大地激励和调动了学生探究的积极性, 将问题转化为平面几何中学生熟知的圆和射线, 则更是振奋了学生, 学生自然对问题产生了浓厚的兴趣, 对解决问题的方法铭记在心, 更能洞察问题的特点, 通过类比、联想, 寻找解决问题的方案, 优化解决的途径.

参考文献

[1] 陈云烽. 一类根式和的取值范围[J]. 中学数学教学参考(上旬), 2011(9): 31-33.

编后漫笔

当心“恶”文化的侵蚀

张奠宙　赵小平

描写后宫争斗的《甄嬛传》热播，主人公的人性有“善”的一面，如母爱；也有“恶”的一面，如“自私”．教育的作用在于抑恶扬善，司马光说“为人母者不患不慈，患于知爱而不知教也！”，这是指家庭教育，父母不可溺爱孩子．学校教育也是如此，教师要热爱、尊重学生，以学生的发展为本自然是对的．但是，也不能只讲“自主”，却不问“自主”的方向．学生只能听表扬、听不得批评；体育锻炼、劳动实践等都是软绵绵的动作，生怕学生受伤；学生干部的竞选，恶言相向频见，考试成绩排名引发诸多矛盾，甚至发生悲剧．曾有报道说，在教室后面的黑板上贴出了一篇本周优秀作文，那篇作文的作者在上面写了“让那些不服气的人看看！”，这就近似于《甄嬛传》里的恶斗，成人社会中的不良风气了．

善，是要“教”的．人的欲望可以催人奋进，也可以掉进泥潭．以为自主发展就是放任自流，少说少管，这是错误的，是放弃责任！许多人有这样的体会，儿时给要求严格的老师起绰号，可是成人之后的校友会上，这些老师往往受到更多的尊敬．

自主，需要引导，需要批评，需要抑恶扬善．

(上接第10 33页)

(2) 一种方法、一种思想，它并不是高不可攀的，不仅存在书本中，老师的嘴里，更要让它存在于我们的意识中．“再算一次”法体现在递推数列中就是将递推关系式中n替换为$\cdots, n-2, n-1, n+1, n+2, \cdots$中一值，将两个关系式相加相减等，这种方法是我们探究数列问题的重要的思想方法，也是我们再发现、再创造的思维方式．

(3) 在我们研究试题时，不要只见树木，不见森林，要在研究中不断抽象、概括、总结方法，同时要对试题进行再思考，尽量做到一题多解、一题多变、一法多用．

参考文献

[1] 李爱生. 常量替换精彩迭现 [J]. 数学通报, 2011(10): 30–32.

[2] 阮伟强. 一堂以高考题为载体的竞赛辅导课 [J]. 中学数学教学参考, 2011(4): 57–59.

数学教学
SHU XUE JIAO XUE
2012年第10期(总第302期)

名誉主编：张奠宙
主　　编：赵小平
常务副主编：忻重义
发行范围：公开
电　　话：021–62232712

主管单位：中华人民共和国教育部
主办单位：华东师范大学
出　　版：上海《数学教学》杂志社
邮政编码：200062(上海中山北路3663号)
广告许可证：3100720050001
印　　刷：华东师范大学印刷厂
国内总发行：上海市邮政局报刊发行局
国内订阅：全国各邮电局
电子信箱：sxjxzz@math.ecnu.edu.cn

定价：5.50元　国内统一连续出版物号：CN31–1024/G4　每月12日出版　代号：4–357

2011莫斯科大学罗蒙诺索夫奥林匹克

050035 河北省石家庄学院数学系 王玉怀

莫斯科大学每年为中学生举办一次名为罗蒙诺索夫(ΛΟΜΟΗΟCΟΒ)的数学竞赛[1], 竞赛分两个阶段: 预赛和决赛. 本文根据我国《数学竞赛大纲》, 摘译于2010年11月举行预赛、2011年1月进行决赛的试题及其解答, 供数学教育工作者参阅.

预赛试赛

1. 解不等式

$\sqrt{x^2-1}\leqslant\sqrt{5x^2-1-4x-x^3}$.

2. 在区间 $(-2\pi,2\pi]$ 上, 求方程

$|\sin 2x-\cos x|=||\sin 2x|-|\cos x||$

的所有解.

3. 直角三角形斜边上的高,将锐角的角平分线分成5:2 (由顶点起), 求这个角.

4. 方程

$$\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-2)^2}=\frac{2}{x^2}$$

有多少个解?

5. 已知x_0是方程$x^{11}+x^7+x^3=1$的根. 问: x_0进行几次幂运算结果等于数$x_0^4+x_0^3-1$?

6. 已知球与三棱锥$S-ABC$的所有棱都相切, 与侧棱SA、SB和SC的切点分别记为点A'、B'和C'. 若$AB=BC=SB=5$, $AC=4$. 求棱锥$S-A'B'C'$的体积.

决赛试题

7. 在平面直角坐标系中, 求不等式组

$$\begin{cases}\sqrt{1-x}+2x\geqslant 0,\\ -1-x^2\leqslant y\leqslant 2+\sqrt{x}\end{cases}$$

的图像所围成图形的面积.

8. 将一个球切(削)成一个正四棱锥, 若这个四棱锥的底面边长为14; 垂幅("垂幅"即棱锥侧面底边上的高——译者注)等于12, 求: 这个球的半径最小是多少?

9. 解不等式

$\log_5(5x^2+2x)\cdot\log_5\left(5+\dfrac{2}{x}\right)>\log_5 5x^2$.

10. 两圆相互内切于点K. 较大的圆的弦AB与小圆相切于点L, 并且$AL=10$. 若$AK:BK=2:5$, 求BL.

11. 若方程$x^5+2x^4+ax^2+bx=c$的实根集合恰好由-1和1组成, 求a,b,c的值.

12. 已知函数$y=f(t)$, 方程$f(\sin x)=0$在区间$\left[\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right]$上根的和等于$33\pi$, 方程$f(\cos x)=0$在区间$\left[\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right]$上根的和等于$23\pi$. 求方程$f(\cos x)=0$在区间$\left[\dfrac{x}{2},\pi\right]$上根的和.

解答

1. 解:

$\sqrt{x^2-1}\leqslant\sqrt{5x^2-1-4x-x^3}\iff$

$\iff 0\leqslant x^2-1\leqslant 5x^2-1-4x-x^3$

$\iff\begin{cases}x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty),\\ x(x-2)^2\leqslant 0\end{cases}$

$\iff x\in(-\infty,-1]\cup\{2\}$.

2. 解:

$|\sin 2x-\cos x|=||\sin 2x|-|\cos x||\iff$

$\iff(\sin 2x-\cos x)^2=(|\sin 2x|-|\cos x|)^2$

$\iff\sin 2x\cos x=|\sin 2x|\cdot|\cos x|$

$\iff\sin 2x\cos x\geqslant 0\iff\sin x\cos^2 x\geqslant 0$

$\iff\cos x=0$或$\sin x\geqslant 0$.

由条件$x\in(-2\pi,2\pi]$, 即得答案: $(-2\pi,-\pi]\cup[0,\pi]\cup\left\{-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right\}$.

3. 解: 设$AD=5x, DL=2x$ (如图1), 那么$\cos\angle LAH=\dfrac{AH}{AD}=\dfrac{AH}{5x}=\cos\angle LAC=$

$\frac{AC}{AL}=\frac{AC}{7x}$. 于是, $\cos\angle CAH=\frac{AH}{AC}=\frac{5}{7}$, 所以 $\angle A=\arccos\frac{5}{7}$.

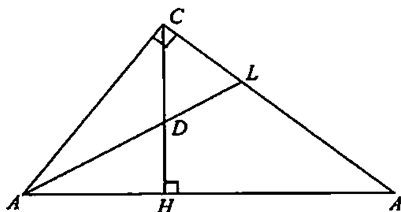


图1

4. 解: 研究函数 $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-2)^2}$ 和 $y(x)=\frac{2}{x^2}$ (如图2).

当 $x<0$ 时, 显然有不等式 $x-2<x-1<x<0$, 于是 $\frac{1}{(x-2)^2}<\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{(x-1)^2}<\frac{1}{x^2}$, 因此 $f(x)<g(x)$. 即当 $x<0$ 时, 方程无解.

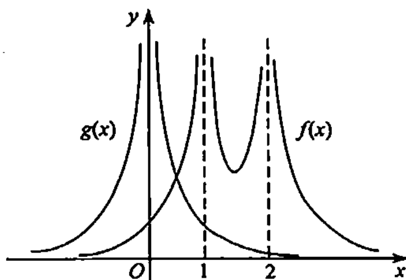


图2

在区间 (0, 1) 上, 因为 $f'(x)=\frac{-2}{(x-1)^3}+\frac{-2}{(x-2)^3}>0$, 所以函数 $f(x)$ 由 $\frac{5}{4}$ (不包含它)递增到 $+\infty$, 而 $g'(x)=\frac{-4}{x^3}<0$, 所以函数 $g(x)$ 由 $+\infty$ 递减到2 (不包含它), 因此, 在这个区间上方程恰有一解.

在区间 (1, 2) 上, 因为 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=\frac{3}{2}$ 对称, 因此 $f(x)\geqslant f\left(\frac{3}{2}\right)=8$, 而 $g(x)<g(1)=2$, 因此, 在这个区间上方程无解.

当 $x>2$ 时,有不等式 $0<x-2<x-1<x$. 于是 $\frac{1}{(x-1)^2}>\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{(x-2)^2}>\frac{1}{x^2}$, 所以 $f(x)>g(x)$. 即当 $x>2$ 时, 方程无解. 因此, 该方程恰有1个解.

5. 解: 因为 $1=x_0^{11}+x_0^7+x_0^3$, 所以

$$x_0^4+x_0^3-1=x_0^4+x_0^3-x_0^{11}-x_0^7-x_0^3=x_0^4(1-x_0^7-x_0^3)=x_0^4(x_0^{11}+x_0^7+x_0^3-x_0^7-x_0^3)=x_0^{15}.$$

6. 解: 因为球与所有的棱相切, 所以可计算得 $BC+AS=AB+SC=AC+SB=9$ (如图3), 于是 $\triangle ASC$ 是等边三角形. 那么 $\triangle A'SC'$ 也是等边三角形, 因此 $SA'=SC'=A'C'=2$. 棱锥 $S-ABC$ 的体积就等于以 $\triangle ASC$ 为底的正棱锥 $B-ASC$ 的体积, 即 $V_{S-ABC}=V_{B-ASC}=\frac{4}{3}\sqrt{59}$.

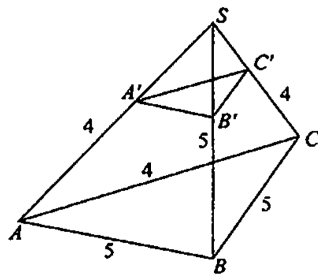


图3

因为 $\frac{V_{S-A'B'C'}}{V_{S-ABC}}=\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{SA'\cdot SB'\cdot SC'}{SA\cdot SB\cdot SC}$, 于是

$$V_{S-A'B'C'}=\frac{1}{10}V_{S-ABC}=\frac{2}{15}\sqrt{59}.$$

7. 解: 由题意知函数定义域为 [0,1]. 当 $x\in[0,1]$ 时, 函数 $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=\sqrt{x}$ 互为反函数, 它们的图像合起来, 其面积由条件 $x\in[0,1]$, $-1-x^2\leqslant y\leqslant 2+\sqrt{x}$ 确定, 如图4, 而其中有相同的部分组成. 因此, 由条件 $x\in[0,1]$, $y\in[-2,2]$ 组成的长方形的面积等于所求的图形的面积, 即它等于4.

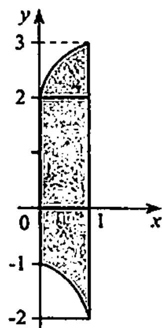


图4

8. 解: 球的直径不能小于包含在它里面的棱锥底面的对角线, 也就是不小于边长为14的正方形的对角线 $14\sqrt{2}$. 因此, 所求的球的半径不小于 $7\sqrt{2}$. 另一方面, 以棱锥底面对角线的交点为中心, $7\sqrt{2}$ 为半径的球包含棱锥的顶点, 因为棱锥的高等于 $h=\sqrt{144-49}=\sqrt{95}<7\sqrt{2}$.

9. 解:

$\log_5\left(5+\frac{2}{\pi}\right)\cdot\log_5(5x^2+2x)>\log_5 5x^2$

$\Longleftrightarrow \log_5\left(5+\frac{2}{x}\right)\cdot\log_5(5x^2+2x)>1+\log_5 x^2$

$\Longleftrightarrow \log_5\left(5+\frac{2}{x}\right)\cdot\log_5(5x^2+2x)>1+\log_5(5x^2+2x)-\log_5\left(5+\frac{2}{x}\right)$

$\Longleftrightarrow \left[\log_5\left(5+\frac{2}{x}\right)-1\right][\log_5(5x^2+2x)+1]>0$

$\Longleftrightarrow \left[\log_5\left(5+\frac{2}{x}\right)-\log_5 5\right]\left[\log_5(5x^2+2x)-\log_5\frac{1}{5}\right]>0$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}\left(5+\frac{2}{x}-5\right)\left(5x^2+2x-\frac{1}{5}\right)>0,\\ 5+\frac{2}{x}>0,\\ 5x^2+2x>0\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\left(x-\frac{-1+\sqrt{2}}{5}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{2}}{5}\right)}{x}>0,\\ x\in\left(-\infty,-\frac{2}{5}\right)\cup(0,+\infty)\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}x\in\left(\frac{-1-\sqrt{2}}{5},0\right)\cup\left(\frac{-1+\sqrt{2}}{5},+\infty\right),\\ x\in\left(-\infty,-\frac{2}{5}\right)\cup(0,+\infty).\end{cases}$$

于是,

$$x\in\left(\frac{-1-\sqrt{2}}{5},-\frac{2}{5}\right)\cup\left(\frac{-1+\sqrt{2}}{5},+\infty\right).$$

10. 解: 作弦PQ及公切线MN(如图5), 那么$\angle PQK=\angle PKM=\angle ABK$, 所以$PQ/\!/AB$, $\widehat{PL}=\widehat{QL}$. 因此$\angle PKL=\angle QKL$, 即$KL$是$\angle AKB$的角平分线, 由角平分线的性质, 有$\frac{AL}{BL}=\frac{AK}{BK}=\frac{2}{5}\Longleftrightarrow BL=10\cdot\frac{5}{2}=25$.

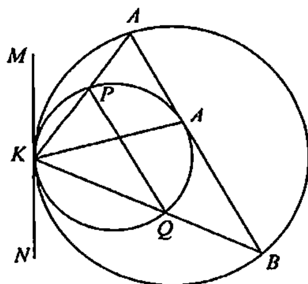


图5

11. 解: -1和1是方程$x^5+2x^4+ax^2+bx-c=0$的根, 当且仅当参数a、b、c满足$\begin{cases}3+a+b-c=0,\\1+a-b-c=0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}b=-1,\\c=a+2.\end{cases}$

所以$x^5+2x^4+ax^2+bx-c=(x^2-1)(x^3+2x^2+x+2+a)$, 方程 $x^3+2x^2+x+2+a=0$至少有一个根, 依题意, 它应等于1或-1.

1) 若$x=1$是根, 那么$a=-6$, 于是$x^3+2x^2+x+2+a=x^3+2x^2+x-4=(x-1)(x^2+3x+4)$.

方程$x^2+3x+4=0$无实根, 因此$a=-6$满足条件.

2) 若$x=-1$是根, 那么$a=-2$, 于是$x^3+2x^2+x+2+a=x^3+2x^2+x$.

显然方程$x^3+2x^2+x=0$还有根$x=0$, 即不满足问题的要求. 于是, $a=-6$, $b=-1$, $c=-4$.

12 解: 设方程$f(\sin x)=0$在区间$\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$上有$k$个根$x_1,x_2,\cdots,x_k$, 这意味着方程$f(t)=0$在区间$[-1,0]$上有$k$个根$t_1,t_2,\cdots,t_k$. 因为$\arcsin t_i\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$, 因此$x_i=2\pi+\arcsin t_i$, $i=1,2,\cdots,k$, 并且$33\pi=x_1+x_2+\cdots+x_k=2\pi k+\arcsin t_1+\cdots+\arcsin t_k$.

类似地, 方程$f(\cos x)=0$在区间$\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$上有$k$个根$y_i=2\pi-\arccos t_i$, $i=1,2,\cdots,k$(因为$\arccos t_i\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$), 因此

$23\pi=y_1+\cdots+y_k=2\pi k-\arccos t_1-\cdots-\arccos t_k$.

由上述两个等式, 得

$\arcsin t_1+\cdots+\arcsin t_k+\arccos t_1+\cdots+\arccos t_k=10\pi$,

而由恒等式$\arcsin a+\arccos a=\frac{\pi}{2}$, 推得$\frac{\pi}{2}k=10\pi$, 所以$k=20$.

最后, 在区间$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$上, 方程$f(\cos x)=0$同样有$k=20$个根: $\arccos t_1,\cdots,\arccos t_{20}$, 并且它们的和等于$\arccos t_1+\cdots+\arccos t_{20}=2\pi k-23\pi=2\pi\cdot20-23\pi=17\pi$.

参考文献

[1] Алексеев В.Б., Юмащев М.В.. Олцмпизз МГу《ЛОМОНОСОВ》——2011. Мзтематцка Вцколе, 1/2012. 12 19.

一道预赛试题的推广与变式

201801 上海市育才中学 龚新平

通常将正整数n的各数位上的数字之和记为$S(n)$, 这个看似简单的数论函数经常出现在国内外各种数学竞赛试题中, 本文将对与之相关的一道试题进行推广, 并探究几个变式问题.

问题 (2011年江西省预赛试题) 用$S(n)$表示正整数n的各数位上的数字之和, 则$\sum\limits_{n=1}^{2011}S(n)=$______.

解: 先考虑0到999, 添加数码0后全部用三位数表示, 得到集合$M=\{000,001,\cdots,999\}$, 对每个$a\in\{0,1,\cdots,9\}$, 集合M中百位、十位、个位为a的"三位数"均恰有100个, 故$\sum\limits_{n=1}^{999}S(n)=\sum\limits_{n=0}^{999}S(n)=3\cdot100\cdot(0+1+\cdots+9)=13500$, 从而$\sum\limits_{n=1}^{2011}S(n)=\sum\limits_{n=0}^{1999}S(n)+\sum\limits_{n=2000}^{2011}S(n)=1000+2\sum\limits_{n=0}^{999}S(n)+72=28072$.

推广 用$S(n)$表示正整数n的各数位上的数字之和, $S_n=S(1)+S(2)+\cdots+S(n)$, 则有

(1) $S_{\underbrace{k9\cdots9}_{m个}}=10^m(1+2+\cdots+k)+(k+1)S_{\underbrace{9\cdots9}_{m个}}(k=1,2,\cdots,9,m\in\mathbf{N}^*)$;

(2) $S_{\underbrace{k9\cdots9}_{m个}}=m\cdot10^{m-1}S_9\ (m\in\mathbf{N}^*)$.

证: (1)由$S_9=S(0)+S(1)+S(2)+\cdots+S(9)=0+1+2+\cdots+9=45$, $S_{19}=10\cdot1+2S_9, S_{29}=10\cdot(1+2)+3S_9,\cdots,S_{99}=10\cdot(1+2+3+\cdots+9)+10S_9,\cdots,S_{199}=100\cdot1+2S_{99}, S_{299}=100\cdot(1+2)+2S_{99},\cdots,S_{999}=100\cdot(1+2+\cdots+9)+10S_{99},\cdots,S_{1999}=1000\cdot1+2S_{999}, S_{2999}=1000\cdot(1+2)+3S_{999},\cdots$, 依次类推, 由数学归纳法易得$S_{\underbrace{k9\cdots9}_{m个}}=10^m(1+2+\cdots+k)+(k+1)S_{\underbrace{9\cdots9}_{m个}}\ (k=1,2,\cdots,9,m\in\mathbf{N}^*)$;

(2) 取$k=9$, 有$S_{\underbrace{9\cdots9}_{(m+1)个}}=10^mS_9+10S_{\underbrace{9\cdots9}_{m个}}$, 两边同除$10^{m+1}$, 可知数列$\{S_{\underbrace{9\cdots9}_{m个}}/10^m\}$是公差为$\frac{S_9}{10}$的等差数列, 从而易得$S_{\underbrace{9\cdots9}_{m个}}=m\cdot10^{m-1}S_9\ (m\in\mathbf{N}^*)$, 即$S_{\underbrace{k9\cdots9}_{m个}}=10^m(1+2+\cdots+k)+(k+1)m\cdot10^{m-1}S_9=\frac{(k+1)(k+9m)}{2}\cdot10^m$.

例1 用$S(n)$表示正整数n的各数位上的数字之和, 求$S(1)+S(2)+\cdots+S(10^{2012}-1)$.

解: 由推广易知$S(1)+S(2)+\cdots+S(10^{2012}-1)=2012\cdot10^{2011}\cdot S_9=90540\cdot10^{2011}$.

例2 2012比其数码和大2007, 若称比自身数码和恰好大2007的自然数为"好数", 求所有好数之和.

解: 设$f(n)$为n与n的各数位上的数字之和的差(n为正整数), 即$f(n)=n-S(n)$. 由$f(n+1)-f(n)=1+S(n)-S(n+1)$知, 若$n+1$不发生进位, 则$S(n+1)=S(n)+1$, 故$f(n+1)=f(n)$; 若$n+1$发生进位, 则$S(n)>S(n+1)$, 故$f(n+1)>f(n)$, 且$9\,|\,f(n)$. 即$f(n)=n-S(n)$是非严格递增的, 而$f(2009)<f(2010)=f(2011)=\cdots=f(2019)=2007<f(2020)$, 故所有好数之和为$2010+2011+\cdots+2019=20145$.

变式 用$p(n)$表示正整数n的各数位上非零数字的乘积, $S_n=p(1)+p(2)+\cdots+p(n)$, 则有

(1) $S_{\underbrace{k9\cdots9}_{m个}}=46^m-1\ (m\in\mathbf{N}^*)$;

(2) $S_{\overline{k\underbrace{9\cdots9}_{m个}}}=\left[\frac{k(k+1)}{2}+1\right]\cdot46^m-1$, $(k\in\{0,1,2,\cdots,9\},m\in\mathbf{N}^*)$.

证: (1) 对所有位数不多于m位的正整数, 若位数不足m位在前面添加数字0变成m位数, 所有正整数的各数位上的数字乘积之和为: $(0\cdot0\cdot\ \cdots\ \cdot0+0\cdot0\cdot\ \cdots\ \cdot1+\cdots+9\cdot9\cdot\ \cdots\ \cdot8+9\cdot9\cdot\ \cdots\ \cdot9)-0\cdot0\cdot\ \cdots\ \cdot0=(0+1+2+\cdots+9)^m-0$, 而$p(n)$表示$n$各数位上非零数字的乘积, 只需上式中将所有0用1替代, 可得$S_{\underbrace{\overline{9\cdots9}}_{m个}}=p(1)+p(2)+\cdots+p(10^m-1)=(1+1+2+\cdots+9)^m-1=46^m-1$;

(2) $S_{\overline{k\underbrace{9\cdots9}_{m个}}}=\Big(p(1)+p(2)+\cdots+p(\underbrace{\overline{9\cdots9}}_{m个})\Big)+p(\overline{1\underbrace{0\cdots0}_{m个}})+\Big(p(\overline{10\cdots1})+p(\overline{10\cdots2})+\cdots+p(\overline{1\underbrace{9\cdots9}_{m个}})\Big)+p(\overline{2\underbrace{0\cdots0}_{m个}})+\Big(p(\overline{20\cdots1})+p(\overline{20\cdots2})+\cdots+p(\overline{2\underbrace{9\cdots9}_{m个}})\Big)+\cdots+p(\overline{k\underbrace{0\cdots0}_{m个}})+\Big(p(\overline{k0\cdots1})+p(\overline{k0\cdots2})+\cdots+p(\overline{k\underbrace{9\cdots9}_{m个}})\Big)=(46^m-1)\cdot(1+1+2+\cdots+k)+(1+2+\cdots+k)=\left[\frac{k(k+1)}{2}+1\right]\cdot46^m-1$.

例3 用$p(n)$表示正整数n的各数位上非零数字的乘积, $S_n=p(1)+p(2)+\cdots+p(n)$. 求(1) S_{2012}; (2) $S_{\overline{4\underbrace{0\cdots0}_{2010个0}12}}=p(1)+p(2)+\cdots+p(\overline{4\underbrace{0\cdots0}_{2010个0}12})$.

解: (1) $S_{2012}=S_{1999}+p(2000)+p(2001)+\cdots+p(2012)=\left[\frac{1(1+1)}{2}+1\right]\cdot46^3-1+2(1+1+2+\cdots+9)+2+2+4=194771$;

(2) $S_{\overline{4\underbrace{0\cdots0}_{2010个0}12}}=S_{\overline{3\underbrace{9\cdots9}_{2012个9}}}+p(\overline{4\underbrace{0\cdots0}_{2012个0}})+p(\overline{4\underbrace{0\cdots0}_{2011个0}1})+\cdots+p(\overline{4\underbrace{0\cdots0}_{2010个0}12})=\left[\frac{3(3+1)}{2}+1\right]\cdot46^{2012}-1+4(1+1+2+\cdots+9)+4+4+8=7\cdot46^{2012}+199$.

参考文献

[1] 2012高中数学联赛备考手册(预赛试题集锦)[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2012.

(上接第10-24页)

不同点, 且多边形$A_1A_2\cdots A_n$的重心是原点, 则n边形$A_1A_2\cdots A_n$的面积为$\frac{1}{2}nab\sin\frac{2\pi}{n}$.

最后, 仍需说明的是后三个推广中如果图形是圆, 则$a=b=r$.

4. 结束语

数学问题中往往有很多变量或很多对象、很多数据, 而它们的变换和操作总是按一定规则进行, 如同音乐在流动的变奏中, 保持着主旋律不变的特征. 一些复杂的数学问题背后总是隐藏着一些恒定的东西, 那就是不变量与不变性. 数学研究数量变化和几何图形的性质以及形的运动变化, 更要研究其中的不变因素.

参考文献

[1] 李加军. 解两道保送生考试题[J]. 中等数学, 2011(7): 11-12.

[2] 杨同伟. 重心是原点的椭圆(或圆)内接三角形性质初探[J]. 数学通讯, 2012(1)(下半月): 41-42.

⊙? ⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙

数学问题与解答

2012年第8期问题解答

⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙! ⊙

861. 如图1, 在$\triangle ABC$中, D、E分别为边AB、AC上的点, BE与CD交于点G, $\triangle ABE$的外接圆与$\triangle ACD$的外接圆交于另一点P, AG的延长线与$\triangle ACD$的外接圆交于点Q(点Q异于点A), 求证: $PQ /\!/ CD$的充要条件是$DE /\!/ BC$.

A D E G B C P Q

图1

(243151 安徽省当涂县青山中学 令标供题)

证: 连PA、PB、PC、PD、PE、PG, 则$\angle PCD = \angle PAD = \angle PEB$, 故$P$、$C$、$E$、$G$四点共圆, $\angle EPG = \angle ACG = \angle APD$. 于是$\angle DPG = \angle APE$. 又$\angle PDG = \angle PAC$, 故$\triangle PDG \backsim \triangle PAE$, $\dfrac{PG}{DG} = \dfrac{PE}{AE}$. ……… ①

充分性: 由$DE /\!/ BC$得

$\dfrac{DG}{GC} = \dfrac{DE}{BC} = \dfrac{AE}{AC}$. ……………… ②

由①×②得$\dfrac{PG}{GC} = \dfrac{PE}{AC}$. 又$\angle EPG = \angle ACG$, 因此$\triangle PEG \backsim \triangle CAG$, $\angle PEB = \angle CAG = \angle CPQ$, 进而$\angle PCD = \angle PAD = \angle PEB = \angle CPQ$, 故$PQ /\!/ CD$.

必要性: 由$PQ /\!/ CD$知$\angle PCD = \angle CPQ = \angle CAG$. 进而由$\angle PEG = \angle PCD$知$\angle PEG = \angle CAG$.

又由$\angle EPG = \angle ACG$, 知$\triangle PEG \backsim \triangle CAG$, $\dfrac{PG}{GC} = \dfrac{PE}{AC}$. ……………… ③

由①、③得$\dfrac{DG}{GC} = \dfrac{AE}{AC}$. ………… ④

因BE为$\triangle ACD$的截线, 由梅氏定理, 得$\dfrac{CE}{EA} \cdot \dfrac{AB}{BD} \cdot \dfrac{DG}{GC} = 1$. ……………… ⑤

由④、⑤得$\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AC}{CE}$, 因此$DE /\!/ BC$.

862. 设$x \in \mathbf{N}$, 求证: x^2+17的形如$4n+3$的质因数必有偶数个.

(157000 黑龙江省牡丹江市 韩科供题)

证: 设x^2+17的形如$4n+3$的质因数有奇数个, 即$x^2+17 = 2^t a b_1 b_2 \cdot \cdots \cdot b_{2m-1}$($m \in \mathbf{N}^*$), 其中$t$为非负整数, a是所有形如$4n+1$的质因数之积, $b_1, b_2, \cdots, b_{2m-1}$是形如$4n+3$的质因数.

记$c = a b_1 b_2 \cdot \cdots \cdot b_{2m-1}$, 则$c$是形如$4n+3$的奇数, 且$x^2+17 = 2^t c$.

当x为偶数时, $t=0$, $x^2+17=c$. 另一方面, $x^2+17 \equiv 1 \pmod 4$, 这与$c \equiv 3 \pmod 4$矛盾.

当x为奇数时, $x^2 \equiv 1 \pmod 8$, $x^2+17 \equiv 2 \pmod 8$, $t=1$. 于是$x^2+17=2c$. 因$2c \equiv 6 \pmod 8$, 导致矛盾. 故x^2+17的形如$4n+3$的质因数必有偶数个.

863. 求方程组

$$\begin{cases}(x+y)(x^2+y^2)=-5,\\(y-z)(y^2+z^2)=13,\\(x-z)(x^2+z^2)=40\end{cases}$$

的实数解.

(050048 河北省石家庄 王玉怀供题)

解: 将第一、第二、第三个方程的两边分别乘以$x-y$, $y+z$, $-x-z$, 得

$$\begin{cases}x^4-y^4=5(y-x),\\y^4-z^4=13(y+z),\\z^4-x^4=-40(x+z).\end{cases}$$

将上述三个方程相加得$18y-45x-27z=0$, 即$2y=5x+3z$, 易验证方程组实数解中$x\neq 0$. 设$\frac{y}{x}=u$, $\frac{z}{x}=v$, 则$2u=5+3v$, 即$v=\frac{1}{3}(2u-5)$. ……①

将方程组中的第一个方程除以第三个方程, 得

$$\frac{(x+y)(x^2+y^2)}{(x-z)(x^2+z^2)}=-\frac{1}{8},$$

即

$$\frac{(1+u)(1+u^2)}{(1-v)(1+v^2)}=-\frac{1}{8},$$

$$8(u+1)(u^2+1)=(v-1)(v^2+1). \cdots\cdots ②$$

由①、②消去v, 得

$8(u^3+u^2+u+1)=\left(\frac{2}{3}u-\frac{8}{3}\right)\left[\frac{1}{9}(2u-5)^2+1\right]$. 化简得$52u^3+72u^2-3u+122=0$, 即$(u+2)(52u^2-32u+61)=0$.

因方程$52u^2-32u+61=0$无实根, 所以$u=-2$, 进而$v=-3$, 即$y=-2x$, $z=-3x$.

将上述两式代入方程组的第二个方程, 得$13x^3=13$, $x=1$, 从而$y=-2$, $z=-3$.

经检验, $(x,y,z)=(1,-2,-3)$是方程组唯一的一组解.

864. 以区间$(0,\ m)$中的整数($m>1$, 且$m\in\mathbf{N}$)为分子, 以m为分母组成分数集合A_1, 其所有元素和为a_1; 以区间$(0,m^2)$中的整数为分子, 以m^2为分母组成不属于A_1的分数集A_2, 其所有元素和为a_2; $\cdots$; 以此类推, 以区间$(0,m^n)$ $(n\in\mathbf{N}^*)$中的整数为分子, 以m^n为分母组成不属于A_1, $A_2,\cdots$, A_{n-1}的分数集A_n, 其所有元素和为a_n. 求$\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$.

(246003 安徽省安庆市第三中学 汪学思供题)

解: 以$(0,m^k)(k\in\mathbf{N}^*)$中整数为分子, 以$m^k$为分母的分数集记为$B_k$, 显然$B_1=A_1$.

当$k\geqslant 2$时, $m,2m,\cdots,(m^{k-1}-1)m\in(0,m^k)$, 且$\frac{m}{m^k}=\frac{1}{m^{k-1}}$, $\frac{2m}{m^k}=\frac{2}{m^{k-1}},\cdots$, $\frac{(m^{k-1}-1)m}{m^k}=\frac{m^{k-1}-1}{m^{k-1}}$, 所以$B_{k-1}\subset B_k$. 从而$A_1=B_1\subset B_2\subset\cdots\subset B_n$, $B_n=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$. 又$A_1,A_2,\cdots,A_n$两两不相交, 故$\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$就是$B_n$的所有元素和, 即

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{m^k}+\frac{2}{m^k}+\cdots+\frac{m^k-1}{m^k}=\frac{(m^k-1)\cdot m^k}{2m^k}=\frac{m^k-1}{2}.$$

865. 设数列$\{a_n\}$满足$a_1=\sqrt{3}$, $a_{n+1}=[a_n]+\frac{1}{a_n-[a_n]}$, 其中$[a_n]$表示不超过$a_n$的最大整数, 求$\{a_n\}$的通项公式.

(637851 四川省蓬安中学 蒋明斌供题)

解: $a_1=\sqrt{3},a_2=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2},a_3=3+\sqrt{3},a_4=\frac{9}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2},a_5=6+\sqrt{3},a_6=\frac{15}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2},\cdots$

由此推测$a_{2k-1}=\sqrt{3}+3(k-1),a_{2k}=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+3(k-1)$, 这里$k\in\mathbf{N},k\geqslant 1$.

下面对k用数学归纳法加以证明.

当$k=1$时, 经验证已经成立, 设$k=m$ $(m\in\mathbf{N},m\geqslant 1)$时推测成立.

$$\because a_{2m}=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+3(m-1),$$

$\therefore [a_{2m}]=3m-1,a_{2m}-[a_{2m}]=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$, $a_{2m+1}=(3m-1)+\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+3m$.

进而$[a_{2m+1}]=3m+1,a_{2m+1}-[a_{2m+1}]=\sqrt{3}-1,a_{2m+2}=(3m+1)+\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+3m$,

$\therefore$ 推测对$k=m+1$也成立.

这就证明了

$$a_n=\begin{cases}\sqrt{3}+3(k-1), & n=2k-1,\\ \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+3(k-1), & n=2k.\end{cases}\quad(r\in\mathbf{N}^*)$$

也就是

$$a_n=\begin{cases}\sqrt{3}+\dfrac{3}{2}(n-1), & n=2k-1,\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}(n-1), & n=2k,\end{cases}$$ 即

$$a_n=\frac{3}{2}(n-1)+\frac{3\sqrt{3}}{4}+(-1)^{n-1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

2012年第10期问题

866. 如图2, $\triangle ABC$的$\angle A$所含的旁切圆$\odot I$与边BC切于点D, 与边AB、AC的延长线分别切于点E、F、AI交$\triangle ABC$外接圆$\odot O$于点Q, 直线QD交$\odot O$于点P, 求证: $AP\perp IP$.

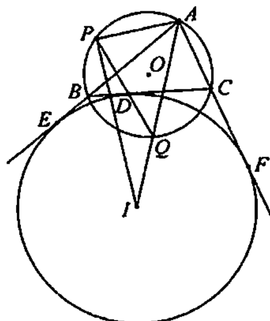


图2

(243151 安徽省当涂县青山中学 令 标供题)

867. 如图3, 凸四边形$ABCD$中, $\angle ABC=60°$, $\angle BAD=\angle BCD=90°$, $AB=2$, $CD=1$, 对角线AC、BD交于点O; 求$\sin\angle AOB$的值.

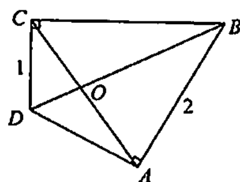


图3

(400026 重庆市第36中学 李枝团供题)

868. 在$\triangle ABC$中, 求证:

$$\frac{6}{5}\leqslant\frac{1}{1+\sin^2A+\sin^2B}+\frac{1}{1+\sin^2B+\sin^2C}+\frac{1}{1+\sin^2C+\sin^2A}<3.$$

(621000 四川绵阳东辰学校高中部 姚先伟供题)

869. 设a、b、$c>0$, 求证:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3abc}\geqslant\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}.$$

(518108 广东省深圳市石岩公学高中部 康 宇供题)

870. 若任意x个连续正整数中必有一个数的各位数字之和是12的倍数, 求x的最小值.

(265703 山东省龙口市龙港经济开发区中村学校 张树胜供题)

(本栏目责任编辑 李大元 汪纯中)

(上接第10-19页)

其他入手之处, 不能让考生非知道题目背景才可入手. 譬如不能这样出题目: 证明方程$x^3-2y^3=1$的任一组整数解$(x,y)(y\neq 0)$都满足$\left|\dfrac{x}{y}-\sqrt[3]{2}\right|<\dfrac{1}{y^4}$. 这样的话, 估计非得彻底求出方程$x^3-2y^3=1$的解不可, 而不能通过放缩不等式来解决了.

下面我们放弃整数这一条件进行探究.

拓展3: 已知$x^3-2y^3=1(x,y\in\mathbf{R},y\neq 0)$, 求证$\left|\dfrac{x}{y}-\sqrt[3]{2}\right|<\dfrac{1}{|y^3|}$.

证明: $\dfrac{x}{y}-\sqrt[3]{2}=\dfrac{\sqrt[3]{2y^3+1}}{y}-\sqrt[3]{2}$

$$=\sqrt[3]{2+\frac{1}{y^3}}-\sqrt[3]{2}$$

$$=\frac{\frac{1}{y^3}}{\left(\sqrt[3]{2+\frac{1}{y^3}}\right)^2+\sqrt[3]{2\left(2+\frac{1}{y^3}\right)}+\sqrt[3]{4}},$$

记$t=\sqrt[3]{2+\dfrac{1}{y^3}}$,

则$\left|\dfrac{x}{y}-\sqrt[3]{2}\right|=\left|\dfrac{1}{y^3}\right|\cdot\dfrac{1}{t^2+\sqrt[3]{2}t+\sqrt[3]{4}}$.

下面证$t^2+\sqrt[3]{2}t+\sqrt[3]{4}>1$, 即证$t^2+\sqrt[3]{2}t+\sqrt[3]{4}-1>0$, 因为$\Delta=(\sqrt[3]{2})^2-4(\sqrt[3]{4}-1)\approx-0.76<0$, 所以$t^2+\sqrt[3]{2}t+\sqrt[3]{4}>1$, 得证.

数学教学 月　刊　大16开48页
主　编：赵　小　平
中华人民共和国教育部主管　华东师范大学主办
贯彻改革精神　反映国内外中学数学教改动态
立足上海　面向全国　注重质量　讲究实效
《数学教学》创刊58周年
网址：http://menet.math.ecnu.edu.cn/teaching
Email：sxjxzz@math.ecnu.edu.cn
邮编：200062　电话：021－62232712
邮发代号4-357，每期定价5.50元，欢迎向当地邮局订购

数字的计量功能(续)

200062 华东师范大学数学系 郑英元

3. 秒是用来确定时间长度的公制单位，1秒(s)定义为铯原子摆动9192631770次所经历的时间．秒的扩充单位有：分(min)、时(h)、日、周、月、年等等，在图9的意大利邮资标签上打印的5个数据07.02.2003 08.32，表示寄信时间为：2003年2月7日8时32分．

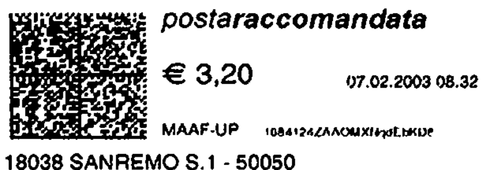


图9 (意大利邮资标签，2003)

4. 从这三个公制单位延伸，还可得到：面积的国际标准单位是平方米(m^2)，体积的公制单位是立方米(m^3)，物体容积的公制单位是升(L)．图10告诉我们喝水(英制)7液体盎司(floz)约等于200毫升．

5. 温度，目前大多数国家采用摄氏度，用符号"°C"表示．也有的国家采用华氏温标，用符号"°F"表示．图11中人的体温为100°F，换算成摄氏度约为38°C．





图10 (澳大利亚，1973) 图11 (澳大利亚，1974)

人们除了量体温，还量血压．血压的常用单位是"毫米汞柱"，就是毫米水银柱(mmHg)，它是直接用水银柱高度的毫米数表示压强的单位．毫米汞柱来源于意大利物理学家、数学家托里拆利(1608-1647，图12)的实验．人们的血压由血压计(图13)来测定，正常成人收缩压为90～140毫米汞柱，舒张压为60～90毫米汞柱．





图12 (意大利，1958) 图13 (墨西哥，1978)

读者在日常生活和工作中还接触到许多事物需要作定量的描述．比如，地球上某一个点，就用二维的数组—经纬度(单位是度、分、秒)来确定．图14指出在加勒比海中的巴布达岛地理位置在北纬17°35′，西经61°49′附近．图15指出在南太平洋的纽埃岛位置在南纬19°，西经169°50′．

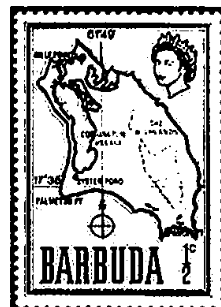


图14 (巴布达，1968)



图15 (纽埃，1950)